

Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет транспорта»

Объект авторского права

УДК 539.3

**МАРКОВА**  
**Марина Владимировна**

**КОЛЕБАНИЯ ТРЁХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ  
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

**Автореферат**  
**диссертации на соискание учёной степени**  
**кандидата физико-математических наук**  
**по специальности**  
**01.02.04 – механика деформируемого твёрдого тела**

Гомель, 2023

Работа выполнена в учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный руководитель – **Леоненко Денис Владимирович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой «Строительная механика,  
геотехника и строительные конструкции» учре-  
ждения образования «Белорусский государствен-  
ный университет транспорта»

Официальные оппоненты – **Тарлаковский Дмитрий Валентинович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий лабораторией динамических испыта-  
ний государственного учебно-научного учрежде-  
ния «Научно-исследовательский институт меха-  
ники Московского государственного универси-  
тета им. М.В. Ломоносова»;

**Поддубный Алексей Алексеевич**,  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
начальник военно-транспортного факультета учре-  
ждения образования «Белорусский государствен-  
ный университет транспорта»

Оппонирующая организация – **Белорусский государственный университет**

Защита состоится 10 ноября 2023 г. в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.27.02 при учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта» по адресу: 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34, ауд. 103, e-mail: strmech@bk.ru, телефон учёного секретаря совета (232) 95-39-61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Автореферат разослан « 2 » октября 2023 г.

Учёный секретарь совета  
по защите диссертаций



А.Г. Козел

## ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей при проектировании деталей механизмов и элементов конструкций является поиск оптимальных с функциональной, экономической, эксплуатационной и эстетической точек зрения решений. В этой связи многослойные элементы конструкций давно заняли свою нишу в инженерном деле. Сочетание свойств разнородных материалов позволяет наделить многослойный композит требуемыми физико-механическими свойствами: тепло- и звукоизоляцией, электромагнитной и радиационной непроницаемостью и т. д. Внедрение композитных материалов в несущие элементы конструкций различного назначения требует разработки расчётных механико-математических моделей, учитывающих неоднородность их структуры и особенности в характере работы под нагрузкой.

Теория многослойных композитных пластин естественным образом сформировалась на базе теории однородных элементов. Среди учёных восточнославянских стран, привнёсших большой вклад в создание и развитие теории пластин, следует выделить Бубнова И.Г., Галёркина Б.Г., Тимошенко С.П., Алфутова Н.А., Власова В.З., Гольденвейзера А.Л., Амбарцумяна С.А., Ильюшина А.А., Григolloка Э.И., Болотина В.В. Существенный вклад в развитие современной теории расчёта слоистых композитов внесли Редди Дж.Н., Каррера Э., Зенкур А.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Яровая А.В., Паймушин В.Н., Михасёв Г.И.

Деформирование круговых трёхслойных элементов, имеющих постоянную толщину всех слагающих пакет слоёв, исследовано достаточно широко. Однако, проектируя элементы с локальными изменениями толщины отдельных слоёв в наиболее напряжённых местах, мы можем способствовать снижению материалоемкости элемента и повышению показателей материалоемкости, что соответствует основным направлениям политики ресурсосбережения. Решению данной проблемы и посвящена диссертационная работа.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Связь работы с научными программами (проектами), темами**

Тема диссертации соответствует п.1 «Цифровые информационно-коммуникационные и междисциплинарные технологии, основанные на них производства. Математика и моделирование сложных функциональных систем (технологических, биологических, социальных)» перечня приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности Республики Беларусь на 2021–2025 годы (утверждено Указом Президента Республики Беларусь от 7 мая 2020 г. № 156).

Работа выполнялась в рамках следующих программ и тем:

- ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении», задание 1.08 «Разработка комплекса ресурсосберегающих технических и технологических решений, обеспечивающих конкурентоспособность подвижного состава железных дорог и снижение затрат на его эксплуатацию на основе разви-

тия современных цифровых технологий моделирования динамики и прочности машин», № ГР 20212458, 01.04.21–31.12.25;

▪ БРФФИ № Т22УЗБ-015 «Деформирование упругопластических композитных элементов инженерных конструкций при однократных и циклических нагрузках с учётом повреждаемости материалов и взаимодействия с окружающей средой», № ГР 20221298, 04.05.22–31.03.24.

### **Цели, задачи, объект и предмет исследования**

Целью исследования является разработка и анализ механико-математической модели поперечных колебаний круговой трёхслойной пластины, имеющей переменную вдоль радиуса толщину внешних слоёв, при восприятии вертикальных осесимметричных внешних воздействий различной локализации, длительности и изменяемости во времени.

Для достижения поставленной цели потребовалось решить следующие задачи:

▪ выполнить вывод уравнений движения для круговой трёхслойной пластины с функционально-переменной толщиной внешних слоёв;

▪ выполнить постановку начально-краевой задачи о поперечных колебаниях круговой трёхслойной пластины со ступенчато-переменной толщиной внешних слоёв;

▪ получить аналитическое решение для собственных колебаний круговой трёхслойной пластины со ступенчато-переменной толщиной внешних слоёв, содержащее формулы для расчёта собственных частот, внутренних усилий и перемещений, возникающих в пластине при различных условиях опирания внешнего контура;

▪ получить аналитическое решение для вынужденных колебаний, позволяющее определять внутренние усилия, напряжения и перемещения в круговой трёхслойной пластине со ступенчато-переменной толщиной внешних слоёв при действии осесимметричных вертикальных нагрузок различной локализации, длительности и изменяемости во времени;

▪ провести апробацию полученных аналитических решений, выраженную в численном анализе влияния геометрических и физико-механических характеристик слоёв, а также вида и продолжительности внешнего воздействия на параметры напряжённо-деформированного состояния пластины.

Объектом исследования являются круговые трёхслойные пластины с переменной толщиной внешних слоёв. Предмет исследования: параметры колебаний и напряжённо-деформированного состояния при динамическом нагружении рассматриваемых пластин.

### **Научная новизна**

Разработаны новые механико-математические модели поперечных колебаний круговой трёхслойной пластины, отличающиеся общим видом разрешающих уравнений движения и учётом изменяемости толщины наружных слоёв пакета; получены новые аналитические решения ряда начально-краевых задач, зависящие от вида внешнего воздействия.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Механико-математическая модель осесимметричных колебаний круговой трёхслойной пластины, включающая в себя уравнения движения в усилиях и перемещениях, начальные и граничные условия и отличающаяся учётом инерции продольных колебаний и инерции вращения нормали в слоях, а также применимостью к пластинам с переменной толщиной внешних слоёв.

2. Механико-математическая модель осесимметричных колебаний круговой трёхслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв, включающая начальные и граничные условия, а также уравнения движения в перемещениях, отличающиеся наличием дополнительных инерционных слагаемых, не учитываемых ранее, позволяющих более точно моделировать процесс.

3. Аналитическое решение начально-краевой задачи о собственных колебаниях круговой трёхслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв при различных способах закрепления внешнего контура, включающее формулы для расчёта собственных частот колебаний и систему собственных функций.

4. Аналитические решения начально-краевых задач о вынужденных поперечных колебаниях круговых трёхслойных пластин со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв, позволяющие получить формулы для определения перемещений, напряжений и деформаций при нагружении пластин осесимметричными вертикальными внешними воздействиями различной локализации, длительности и изменчивости во времени в случае шарнирного и жесткого закрепления внешнего контура.

5. Результаты численной апробации полученных аналитических решений и параметрического анализа НДС, устанавливающие зависимость собственных частот, перемещений и напряжений от геометрии пластины, свойств материалов пакета и вида внешнего воздействия.

### **Личный вклад соискателя учёной степени в результаты диссертации**

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научный руководитель принимал участие в выборе направления исследования и в обсуждении полученных результатов. Совместно с научным руководителем опубликовано три статьи [3, 6, 8], одни материалы международного симпозиума [16].

### **Апробация диссертации и информация об использовании её результатов**

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих международных и республиканских научных конференциях и симпозиумах:

- VII, IX Международная научно-техническая конференция «Теоретическая и прикладная механика» (Минск, 2021, 2023);
- XXIV–XXVI Республиканская научная конференция студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2021–2023);

- X–XII Республиканская научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов «Актуальные вопросы физики и техники» (Гомель, 2021–2023);
- XXVII, XXVIII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Вятчи, 2021, 2022);
- Международная научная конференция «XIII Белорусская математическая конференция» (Минск, 2021);
- XI, XII Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2021, 2022);
- VIII Международная научно-практическая конференция «Строительство и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2022);
- I Международная научно-практическая конференция «Композиты в машиностроении и транспорте» (Гомель, 2023).

Основные аспекты диссертации доложены и обсуждены на научно-методическом семинаре кафедры «Строительная механика, геотехника и строительные конструкции», протокол № 1 от 16.05.2023.

Отдельные результаты диссертации использованы в образовательном процессе при чтении лекций по курсу «Теория упругости и пластичности» студентам специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», а также внедрены в расчётную практику отдела капитального строительства и проектирования РУП «Гомельское отделение Белорусской железной дороги».

### **Опубликованность результатов диссертации**

По теме диссертации опубликовано 20 работ, в том числе 8 статей в рецензируемых научных изданиях и 12 материалов конференций и симпозиумов, общим объёмом 9,0 авторских листов.

### **Структура и объём диссертации**

Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, списка использованных источников, приложений. Объем диссертации составляет 277 страниц, включая 46 рисунков на 30 страницах, 2 таблицы на 1,5 страницах, трёх приложений на 110 страницах и списка используемых источников из 309 наименований на 28 страницах.

## **ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

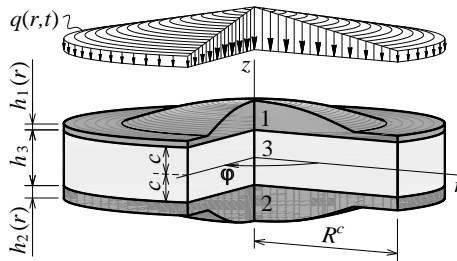
**В первой главе** представлен очерк существующих методов приведения трёхмерной задачи теории упругости к двумерной. Описаны основные подходы метода гипотез, принёсшего наибольший вклад в развитие теории многослойных пластин.

Для обоснования актуальности рассматриваемой в диссертации темы приведён обзор имеющихся на сегодняшний день научных разработок схожей проблематики. Показано, что вопрос статического и динамического деформирования неоднородных в поперечном направлении круговых пластин с переменной толщиной срединного слоя достаточно широко исследован, в частно-

сти в работах зарубежных авторов. В то время как вопрос влияния переменных геометрических параметров внешних слоёв пакета на характеристики колебаний элемента разобран лишь в рамках пластин, имеющих прямоугольную форму. Ввиду чего, основной вектор научной работы направлен на дополнение имеющейся на сегодняшний день расчётно-теоретической базы для исследования круговых трёхслойных пластин, в частности пластин с переменной толщиной наружных слоёв.

Обозначена основная концепция работы, заключающаяся в построении механико-математической модели, учитывающей динамичность приложения внешних воздействий и инерционность рассматриваемого элемента, на основе принципов, сформулированных в современных научных исследованиях для однородных однослойных пластин ступенчато-переменной толщины и слоистых композитов с постоянной толщиной всех слоёв.

**Во второй главе** представлена механико-математическая модель колебаний круговой трёхслойной пластины с переменной толщиной внешних слоёв (рисунок 1).



**Рисунок 1 – Трёхслойная круговая пластина с функционально-переменной толщиной внешних слоёв**

В некоторый момент времени  $t_0$  пластина воспринимает действие осесимметричной вертикальной распределённой нагрузки, не зависящей от координаты  $\varphi$ :  $q = q(r, t)$ , побуждающей возникновение поперечных колебаний. В результате чего в пластине возникают прогибы  $w = w(r, t)$ , сдвиги в заполнителе  $\psi = \psi(r, t)$  и радиальные смещения координатной поверхности  $u = u(r, t)$ . В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Тангенциальные перемещения в слоях в силу симметрии задачи будут отсутствовать, то есть  $u_\varphi = 0$ .

Кинематика рассматриваемого пакета описывается в рамках дискретно-структурного подхода. В тонких внешних слоях 1 и 2 считаются справедливыми классические гипотезы Кирхгофа, а деформирование относительно толстого срединного заполнителя 3 описывается с помощью сдвиговой теории Тимошенко. Перемещения в точке сопряжения слоёв считаются непрерывными. Все деформации, возникающие в пластине от действующей внешней нагрузки, считаются малыми. По внешнему контуру пластина имеет жёсткую диафрагму, препятствующую относительно сдвигу слоёв. Работой заполнителя в тангенциальном направлении пренебрегаем ввиду её малости.

Уравнения движения для рассматриваемой пластины получены из вариационного принципа Гамильтона и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& a_1^+(r)L_2[u(r,t)] + a_2^+(r)L_2[\psi(r,t)] - a_3^+(r)L_2[w(r,t),_r] + \\
& + a_1^+(r),_r u(r,t),_r + a_2^+(r),_r \psi(r,t),_r - a_3^+(r),_r w(r,t),_{rr} + \\
& + a_1^-(r),_r \frac{u(r,t)}{r} + a_2^-(r),_r \frac{\psi(r,t)}{r} - a_3^-(r),_r \frac{w(r,t),_r}{r} - \\
& - [M_1(r)\ddot{u}(r,t) + M_2(r)\ddot{\psi}(r,t) - M_3(r)\ddot{w}(r,t),_r] = 0, \\
& a_4^+(r)L_2[u(r,t)] + a_4^+(r)L_2[\psi(r,t)] - a_5^+(r)L_2[w(r,t),_r] + \\
& + a_4^+(r),_r u(r,t),_r + a_4^+(r),_r \psi(r,t),_r - a_5^+(r),_r w(r,t),_{rr} + \\
& + a_4^-(r),_r \frac{u(r,t)}{r} + a_4^-(r),_r \frac{\psi(r,t)}{r} - a_5^-(r),_r \frac{w(r,t),_r}{r} - \\
& - [M_2(r)\ddot{u}(r,t) + M_4(r)\ddot{\psi}(r,t) - M_5(r)\ddot{w}(r,t),_r] = 0, \\
& a_3^+(r)L_3[u(r,t)] + 2a_3^+(r),_r L_2[u(r,t)] + a_5^+(r)L_3[\psi(r,t)] + 2a_5^+(r),_r L_2[\psi(r,t)] - \\
& - 2a_6^+(r)L_3[w(r,t),_r] - 2a_6^+(r),_r L_2[w(r,t),_r] + \\
& + \left( a_3^+(r),_{rr} + \frac{a_3^-(r),_r}{r} \right) u(r,t),_r + \left( a_5^+(r),_{rr} + \frac{a_5^-(r),_r}{r} \right) \psi(r,t),_r - \left( a_6^+(r),_{rr} + \frac{a_6^-(r),_r}{r} \right) w(r,t),_{rr} + \\
& + \left( a_3^-(r),_{rr} - \frac{a_3^+(r),_r}{r} \right) \frac{u(r,t)}{r} + \left( a_5^-(r),_{rr} - \frac{a_5^+(r),_r}{r} \right) \frac{\psi(r,t)}{r} - \left( a_6^-(r),_{rr} - \frac{a_6^+(r),_r}{r} \right) \frac{w(r,t),_r}{r} - \\
& - \left( \left[ M_3(r),_{rr} + \frac{M_3(r)}{r} \right] \ddot{u}(r,t) + \left[ M_5(r),_{rr} + \frac{M_5(r)}{r} \right] \ddot{\psi}(r,t) - \left[ M_6(r),_{rr} + \frac{M_6(r)}{r} \right] \ddot{w}(r,t),_r \right) - \\
& - [M_3(r)\ddot{u}(r,t),_r + M_5(r)\ddot{\psi}(r,t),_r - M_6(r)\ddot{w}(r,t),_{rr}] - M_1\ddot{w}(r,t) = -q(r,t). \quad (1)
\end{aligned}$$

где  $a_i^\pm(r)$ ,  $M_i(r)$  – коэффициенты, зависящие от плотности  $\rho_k$ , объёмной деформации  $K_k$  материалов слоёв и их толщины  $h_k$ .

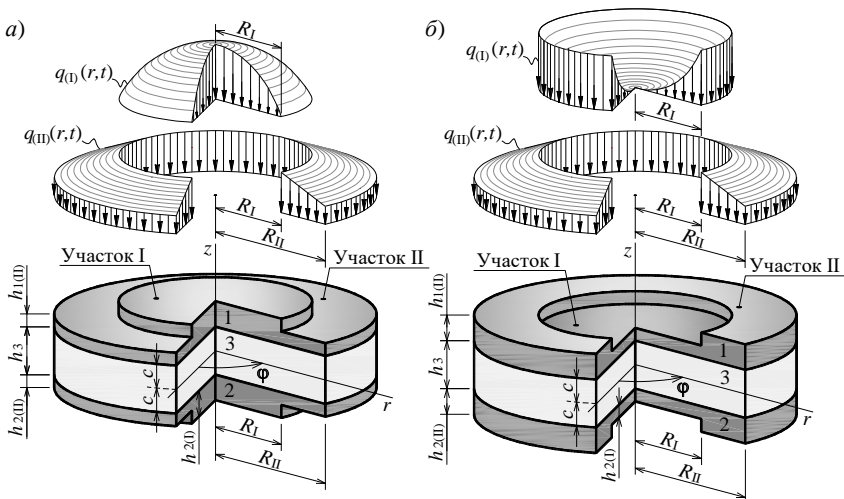
Здесь и далее запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Дифференциальные операторы  $L_2$  (оператор Бесселя) и  $L_3$  определяются следующими соотношениями:

$$L_2[v] \equiv \left( \frac{1}{r}(rv),_r \right),_r \equiv v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} - \frac{v}{r^2}, \quad L_3[v] \equiv \frac{1}{r}(rL_2[v]),_r \equiv v_{,rrr} + \frac{2v_{,rr}}{r} - \frac{v_{,r}}{r^2} + \frac{v}{r^3}. \quad (2)$$

Был рассмотрен частный случай пластины переменной толщины: ступенчатая пластина (рисунок 2), для которой на каждом участке  $h_{k(i,\text{II})} = \text{const}$ . В этом случае коэффициенты  $M_i$  и  $a_i^\pm$ , зависящие от плотности, упругих свойств материала и толщины слоёв, для участков ступенчатой пластины принимают постоянное значение:  $M_{i(i,\text{II})} = \text{const}$ ,  $a_i^\pm = \text{const}$ , то есть  $M_{i(i,\text{II})},_r = 0$  и  $a_{i(i,\text{II})},_r^\pm = a_{i(i,\text{II})},_{rr}^\pm = 0$ .





**Рисунок 2 – Трёхслойная круговая пластина со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв  
а – с уширением в центральной части; б – с сужением в центральной части**

При исследовании поперечных колебаний инерционными силами в продольном направлении и инерционными силами поворота нормали заполнителя можно пренебречь, ввиду их незначительного влияния на поперечные перемещения. Тогда система уравнений движения (1) для каждого участка (I, II) постоянной толщины ступенчатой пластины и для плоской трёхслойной пластины в целом будет иметь вид

$$\Delta_r \Delta_r w_{(i,ii)}(r,t) + D_{(i,ii)} m_{(i,ii)} \Delta_r \ddot{w}_{(i,ii)}(r,t) + D_{(i,ii)} M_{1(i,ii)} \ddot{w}_{(i,ii)}(r,t) = D_{(i,ii)} q_{(i,ii)}(r,t),$$

$$u_{(i,ii)}(r,t) = b_{1(i,ii)} w_{(i,ii)}(r,t)_{,r} + C_{1(i,ii)}^* r + \frac{C_{2(i,ii)}^*}{r} - m_{1(i,ii)} L_1^{-1} [\ddot{w}_{(i,ii)}(r,t)],$$

$$\Psi_{(i,ii)}(r,t) = b_{2(i,ii)} w_{(i,ii)}(r,t)_{,r} + C_{3(i,ii)}^* r + \frac{C_{4(i,ii)}^*}{r} - m_{2(i,ii)} L_1^{-1} [\ddot{w}_{(i,ii)}(r,t)], \quad (3)$$

где  $C_{i(i,ii)}^*$  – константы интегрирования, определяемые из граничных условий;  $b_{i(i,ii)}$ ,  $D_{(i,ii)}$ ,  $m_{(i,ii)}$ ,  $m_{i(i,ii)}$  – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих характеристик материалов слоёв и их толщины.

Оператор Лапласа  $\Delta_r$  и интегральный оператор  $L_1^{-1}$  определяются следующими соотношениями

$$\Delta_r [v] = v_{,rr} + \frac{1}{r} v_{,r}, \quad L_1^{-1} [v] = \frac{1}{r} \int (rv) dr. \quad (4)$$

Система (3) отличается от системы уравнений движения, представленной в работах других авторов, наличием дополнительных инерционных слагаемых.

Решение для ступенчатой пластины в целом формируется с помощью функции Хевисайда  $H_0(r)$  из отдельных решений для каждого участка:

$$H_0(r - R_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq R_1, \\ 1 & \text{при } r > R_1. \end{cases} \quad \begin{aligned} w(r, t) &= w_{(I)}(r, t) + (w_{(II)}(r, t) - w_{(I)}(r, t))H_0(r - R_1), \\ u(r, t) &= u_{(I)}(r, t) + (u_{(II)}(r, t) - u_{(I)}(r, t))H_0(r - R_1), \\ \psi(r, t) &= \psi_{(I)}(r, t) + (\psi_{(II)}(r, t) - \psi_{(I)}(r, t))H_0(r - R_1), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $R_1$  – радиус центрального участка ступенчатой пластины.

Постановка задачи замыкается присоединением начальных и граничных условий. В качестве начальных были приняты следующие условия:

$$w(r, t) \Big|_{t=0} = f(r), \quad \dot{w}(r, t) \Big|_{t=0} = g(r), \quad (6)$$

где  $f(r)$ ,  $g(r)$  – функция прогиба и функция скорости движения точек пластины соответственно.

Граничные условия определяются способом закрепления внешнего контура пластины. Так при *жёсткой заделке* в точке  $r = R^c = R_{II}$ :

$$u_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_{II}} = 0, \quad \psi_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_{II}} = 0, \quad w_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_{II}} = 0, \quad w_{(II)}(r, t)_{,r} \Big|_{r=R_{II}} = 0. \quad (7)$$

При *шарнирном опирании* контура (учитывая жёсткую диафрагму):

$$u_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_{II}} = 0, \quad \psi_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_{II}} = 0, \quad w_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_{II}} = 0, \quad M_{r(II)}(r, t) \Big|_{r=R_{II}} = 0. \quad (8)$$

Так как общее решение для ступенчатой пластины основано на декомпозиции её геометрии на отдельные участки с постоянной толщиной, то необходимо дополнительно потребовать равенства в точке изменения толщины (при  $r = R_1$ ) всех перемещений и внутренних усилий для I и II участка пластины:

$$\begin{aligned} u_{(I)}(r, t) \Big|_{r=R_1} &= u_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_1}, \quad \psi_{(I)}(r, t) \Big|_{r=R_1} = \psi_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_1}, \quad w_{(I)}(r, t) \Big|_{r=R_1} = w_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_1}, \\ w_{(I)}(r, t)_{,r} \Big|_{r=R_1} &= w_{(II)}(r, t)_{,r} \Big|_{r=R_1}, \quad T_{r(I)}(r, t) \Big|_{r=R_1} = T_{r(II)}(r, t) \Big|_{r=R_1}, \quad M_{r(I)}(r, t) \Big|_{r=R_1} = M_{r(II)}(r, t) \Big|_{r=R_1}, \\ H_{r(I)}(r, t) \Big|_{r=R_1} &= H_{r(II)}(r, t) \Big|_{r=R_1}, \quad Q_{(I)}(r, t) \Big|_{r=R_1} = Q_{(II)}(r, t) \Big|_{r=R_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

**В третьей главе** рассмотрены собственные колебания круговой трёхслойной пластины со ступенчато-переменной толщиной внешних слоёв.

Уравнения движения собственных колебаний соответствуют системе (3) при  $q(r, t) = 0$ , решение для которых было получено методом Фурье в виде

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\ u(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \\ \psi(r, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(r) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\omega_n$  – собственные частоты пластины, определяемые из трансцендентного уравнения, полученного из условия равенства нулю детерминанта системы, сформированной из граничных условий;

$A_n$ ,  $B_n$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий;  $W_n(r)$ ,  $U_n(r)$ ,  $\Psi_n(r)$  – собственные функции искомым перемещений.

$$W_n(r) = \frac{1}{d_n} \left( I_0(r\gamma_{(I)n}^+) + k_{1n} J_0(r\gamma_{(I)n}^-) + \left[ k_{2n} I_0(r\gamma_{(II)n}^+) + k_{3n} K_0(r\gamma_{(II)n}^+) + k_{4n} J_0(r\gamma_{(II)n}^-) + k_{5n} Y_0(r\gamma_{(II)n}^-) - I_0(r\gamma_{(I)n}^+) - k_{1n} J_0(r\gamma_{(I)n}^-) \right] H_0(r - R_1) \right), \quad (11)$$

где  $I_0(r\gamma_{(I,II)n}^+)$ ,  $K_0(r\gamma_{(I,II)n}^+)$ ,  $J_0(r\gamma_{(I,II)n}^-)$ ,  $Y_0(r\gamma_{(I,II)n}^-)$  – функции Бесселя первого и второго рода от действительного и мнимого аргумента;

$\gamma_{(I,II)n}^\pm$  – коэффициенты, зависящие от частоты собственных колебаний пластины;

$d_n$  – константы, определяемые из условий нормировки;

$k_{in}$  – коэффициенты, определяемые соотношениями констант интегрирования.

$$d_n^2 = \frac{1}{C_{5(1)n}^2} = \int_0^{R_0} r \left[ I_0(r\gamma_{(I)n}^+) + k_{1n} J_0(r\gamma_{(I)n}^-) + \left[ k_{2n} I_0(r\gamma_{(II)n}^+) + k_{3n} K_0(r\gamma_{(II)n}^+) + k_{4n} J_0(r\gamma_{(II)n}^-) + k_{5n} Y_0(r\gamma_{(II)n}^-) - I_0(r\gamma_{(I)n}^+) - k_{1n} J_0(r\gamma_{(I)n}^-) \right] \cdot H_0(r - R_1) \right]^2 dr, \quad (12)$$

Выражения для  $U_n(r)$  и  $\Psi_n(r)$  определяются из  $W_n(r)$ .

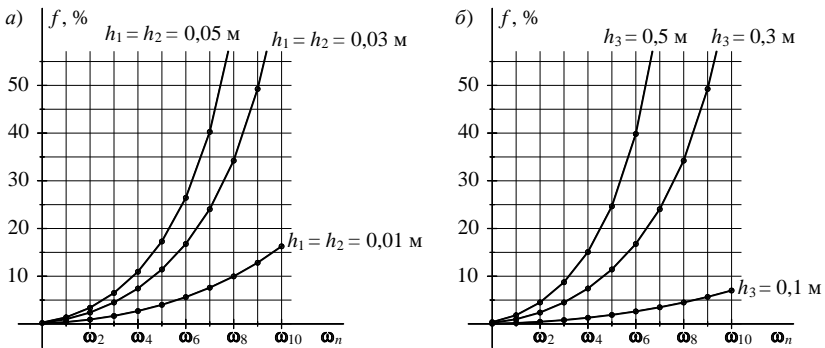
Временные константы интегрирования следуют из начальных условий:

$$A_n = \int_0^{R_0} r W_n(r) f(r) dr, \quad B_n = \frac{1}{\omega_n} \int_0^{R_0} r W_n(r) g(r) dr \quad (13)$$

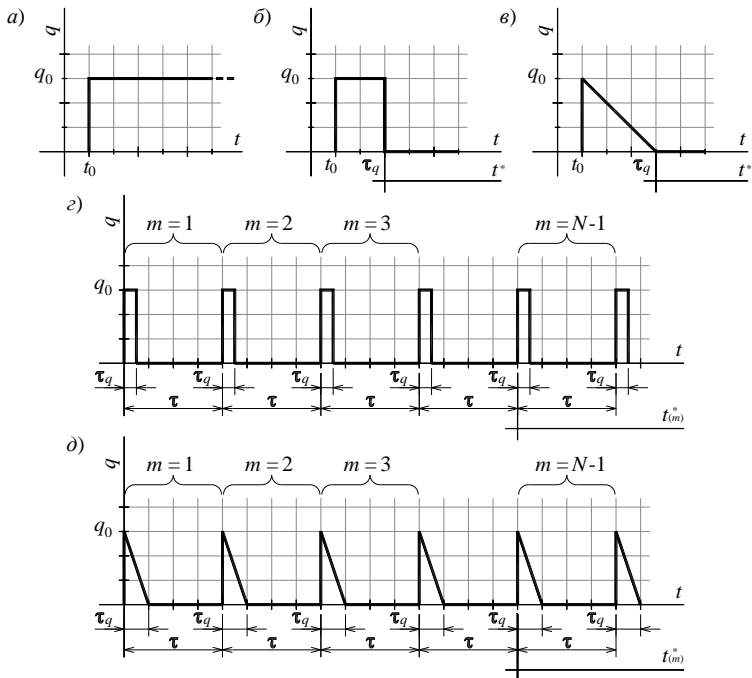
С помощью разработанных компьютерных программ проведено численное исследование изменения собственных частот элемента ступенчато-переменной толщины при изменении его геометрических параметров. Установлено, что для элементов ступенчато-переменной толщины с уширением и сужением в центре зависимость собственных частот  $\omega_n$  от радиуса центрального участка  $R_1$  носит нелинейный характер и определяется преобладающим влиянием совокупной массы либо жёсткости при каждом конкретном значении  $R_1$ .

Для плоской жёстко закреплённой трёхслойной пластины «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т» проанализировано влияние учёта дополнительных инерционных слагаемых на результаты расчёта при определении собственных частот элемента (рисунок 3). Для наглядности полученные точки соединены ломаной линией. Представленные графики свидетельствуют о том, что учёт дополнительных инерционных слагаемых имеет весомое значение лишь при определении высших частот.

**В четвёртой главе** приведено решение задачи о вынужденных колебаниях круговой трёхслойной ступенчатой пластины, побуждаемых линейной во времени внешней нагрузкой (рисунок 4).



**Рисунок 3 – Процентное отклонение в численных результатах расчёта собственных частот пластины**  
**а – при изменении толщины внешних слоёв ( $h_3 = 0,3$  м);**  
**б – при изменении толщины среднего заполнителя ( $h_1 = h_2 = 0,03$  м)**



**Рисунок 4 – Внешнее воздействие**  
**а – внезапно приложенная длительно действующая нагрузка постоянной во времени интенсивности; б – кратковременное ударное воздействие;**  
**в – кратковременное линейно-убывающее воздействие;**  
**г – многократно повторное ударное воздействие;**  
**д – многократно повторное линейно-убывающее воздействие**

Построение решения основано на суперпозиции квазистатических  $w_s(r, t)$ ,  $u_s(r, t)$ ,  $\psi_s(r, t)$  и динамических  $w_d(r, t)$ ,  $u_d(r, t)$ ,  $\psi_d(r, t)$  составляющих иско-  
мых функций перемещений:

$$w_{(I, II)}(r, t) = w_{s(I, II)}(r, t) + w_{d(I, II)}(r, t),$$

$$u_{(I, II)}(r, t) = u_{s(I, II)}(r, t) + u_{d(I, II)}(r, t), \quad \psi_{(I, II)}(r, t) = \psi_{s(I, II)}(r, t) + \psi_{d(I, II)}(r, t). \quad (14)$$

Система, описывающая квазистатическое деформирование пластины, по-  
лучена из уравнений движения (3) путём обнуления инерционных слагаемых.

Решение для квазистатических составляющих функций представлено в виде

$$\begin{aligned} w_{s(I, II)}(r, t) &= C_{s5(I, II)} + C_{s6(I, II)}r^2 + C_{s7(I, II)} \ln r + C_{s8(I, II)}r^2 \ln r + D_{(I, II)}L_4^{-1} \left[ q_{(I, II)}(r, t) \right]. \\ u_{s(I, II)}(r, t) &= C_{s1(I, II)}r + \frac{C_{s2(I, II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)}b_{1(I, II)}r + C_{s7(I, II)}\frac{b_{1(I, II)}}{r} + C_{s8(I, II)}b_{1(I, II)}r(2 \ln r + 1) + \\ &\quad + D_{(I, II)}b_{1(I, II)}L_3^{-1} \left[ q_{(I, II)}(r, t) \right], \\ \psi_{s(I, II)}(r, t) &= C_{s3(I, II)}r + \frac{C_{s4(I, II)}}{r} + 2C_{s6(I, II)}b_{2(I, II)}r + C_{s7(I, II)}\frac{b_{2(I, II)}}{r} + C_{s8(I, II)}b_{2(I, II)}r(2 \ln r + 1) + \\ &\quad + D_{(I, II)}b_{2(I, II)}L_3^{-1} \left[ q_{(I, II)}(r, t) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где  $C_{si(I, II)}$  – произвольные константы интегрирования, определяемые для  
каждого участка пластины из граничных условий (7)–(9).

Интегральные операторы  $L_3^{-1}$  и  $L_4^{-1}$  определяются соотношениями

$$L_3^{-1}[v] = \frac{1}{r} \int r \int r \int (rv) dr dr dr, \quad L_4^{-1}[v] = \int \frac{1}{r} \int r \int r \int (rv) dr dr dr dr. \quad (16)$$

В случае, если функция внешней нагрузки  $q_{(I, II)} = q_{(I, II)}(r, t)$  представлена по  
переменной  $t$  многочленом первой степени, то  $\ddot{w}_{s(I, II)} = 0$ . Тогда система уравне-  
ний движения, описывающих динамические составляющие функции перемеще-  
ний, будет соответствовать системе уравнений собственных колебаний пластины.  
Т.е. решение для  $w_d(r, t)$ ,  $u_d(r, t)$ ,  $\psi_d(r, t)$  соответствует выражениям (10), (11).

Начальные условия вынужденных колебаний приняты однородными:

$$w(r, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \psi(r, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad u(r, t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (17)$$

В этом случае константы интегрирования  $A_n$  и  $B_n$  будут определены из условия

$$w(r, t) \Big|_{t=0} = w_s(r, t) \Big|_{t=0} + w_d(r, t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

$$f(r) = w_d(r, t) \Big|_{t=0} = -w_s(r, t) \Big|_{t=0} \quad \text{и} \quad g(r) = \dot{w}_d(r, t) \Big|_{t=0} = -\dot{w}_s(r, t) \Big|_{t=0}. \quad (19)$$

Напряжения, возникающие в слоях рассматриваемой пластины при вы-  
нужденных колебаниях, определим из закона Гука для девиатора и шаровой  
составляющей тензора напряжений:

$$\sigma_r^{(k)} = 2G_k \varepsilon_r^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = \varepsilon_r^{(k)} \left( K_k + \frac{4}{3} G_k \right) + \varepsilon_\phi^{(k)} \left( K_k - \frac{2}{3} G_k \right) = \varepsilon_r^{(k)} K_k^+ + \varepsilon_\phi^{(k)} K_k^-. \quad (20)$$

С учётом принятых гипотез деформирования пластины, напряжения – в зоне контакта срединного заполнителя и внешних слоёв (при  $z = c$ )

$$\sigma_r^{(3)}(r, t) = K_3^+ (u(r, t)_{,r} + c\psi(r, t)_{,r} - cw(r, t)_{,rr}) + \frac{K_3^-}{r} (u(r, t) + c\psi(r, t) - cw(r, t)_{,r}), \quad (21)$$

– в первом слое по наружной поверхности пластины (при  $z = c + h_1$ )

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r, t) = & K_1^+ (u(r, t)_{,r} + c\psi(r, t)_{,r}) + \frac{K_1^-}{r} (u(r, t) + c\psi(r, t)) - \\ & - \left( K_1^+ w(r, t)_{,rr} + \frac{K_1^-}{r} w(r, t)_{,r} \right) (c + h_{1(I)} + (h_{1(II)} - h_{1(I)}) \cdot H_0(r - R_1)), \end{aligned} \quad (22)$$

– во втором слое по наружной поверхности пластины (при  $z = -c - h_2$ )

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)}(r, t) = & K_2^+ (u(r, t)_{,r} - c\psi(r, t)_{,r}) + \frac{K_2^-}{r} (u(r, t) - c\psi(r, t)) + \\ & + \left( K_2^+ w(r, t)_{,rr} + \frac{K_2^-}{r} w(r, t)_{,r} \right) (c + h_{2(I)} + (h_{2(II)} - h_{2(I)}) \cdot H_0(r - R_1)). \end{aligned} \quad (23)$$

Аналитическое решение для функции прогиба пластины было представлено в виде суммы двух решений на различных временных участках колебаний. Первый временной участок соответствует промежутку от момента вывода пластины из состояния равновесия  $t_0$  до момента завершения действия нагрузки –  $\tau_q$  (функция динамической составляющей прогиба на данном участке обозначена как  $w_d^q$ ). Второй временной участок отсчитывается от момента завершения внешнего воздействия  $\tau_q$  и представляет собой свободные колебания пластины, начальными условиями для которых служат функции прогиба и скорости движения точек пластины при вынужденных колебаниях предыдущего временного участка в момент времени  $t = \tau_q$  (функция динамической составляющей прогиба на данном участке обозначена как  $w_d^0$ ).

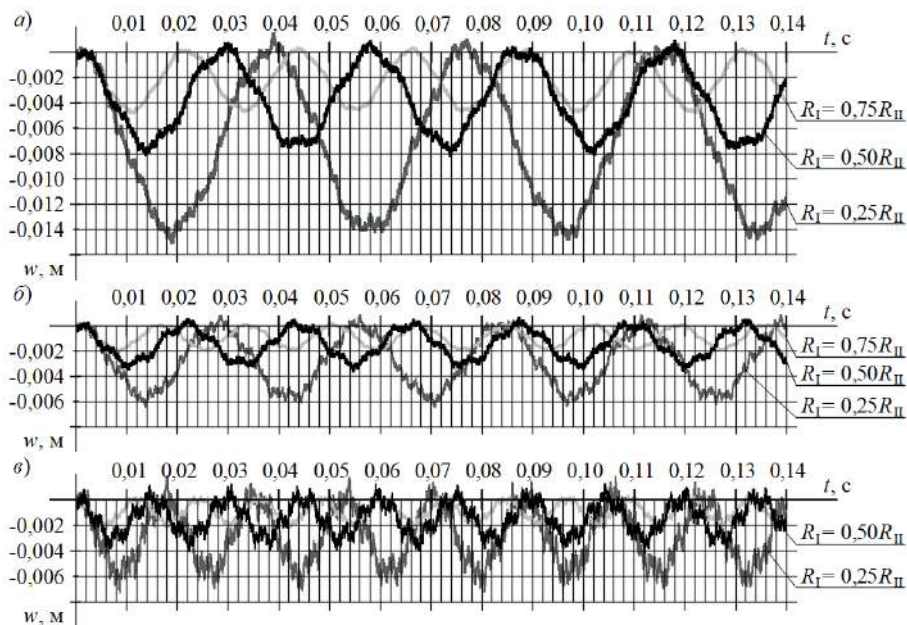
Для циклической внешней нагрузки отличие первого цикла воздействия от всех последующих заключается в начальных условиях для первого временного участка. Для каждого цикла внешнего воздействия была принята собственная локальная координатная ось времени  $t_{(m)}^*$ :  $t_{(m)}^* = t - (m-1)\tau$ . При  $m > 1$  начальными условиями цикла будут служить функции прогиба и скоростей движения точек пластины предыдущего цикла в момент времени  $\tau$ .

Итоговое выражение для функции прогиба пластины представлено в виде

$$\begin{aligned} w(r, t) = & w_s(r, t) + \sum_{m=1}^N \left[ w_{d(m)}^0(t - (m-1)\tau - \tau_q) + \right. \\ & + \left. \left[ w_{d(m)}^q(t - (m-1)\tau) - w_{d(m)}^0(t - (m-1)\tau - \tau_q) \right] \left( H_0[(m-1)\tau + \tau_q - t] - H_0[(m-1)\tau - t] \right) \right] - \\ & - \sum_{m=2}^N \left[ \left( w_{d(m)}^0(t - (m-1)\tau - \tau_q) \right) \cdot H_0((m-1)\tau - t) + \right. \\ & \left. + w_{d(m-1)}^0(t - (m-2)\tau - \tau_q) (1 - H_0[(m-1)\tau - t]) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

По результатам проведённых численных исследований было установлено, что деформативность трёхслойной пластины преимущественно зависит от механических характеристик тонких внешних слоёв и мало зависит от заполнителя,

что представлено на рисунке 5. Рисунок 5 отображает изменения величины прогиба  $w$  в центральной точке пластины ( $r = 0$ ) с течением времени  $t$  вынужденных колебаний, вызванных равномерно-распределённой по всей площади длительно действующей нагрузкой интенсивностью  $q_{(I)} = q_{(II)} = -100$  кПа.

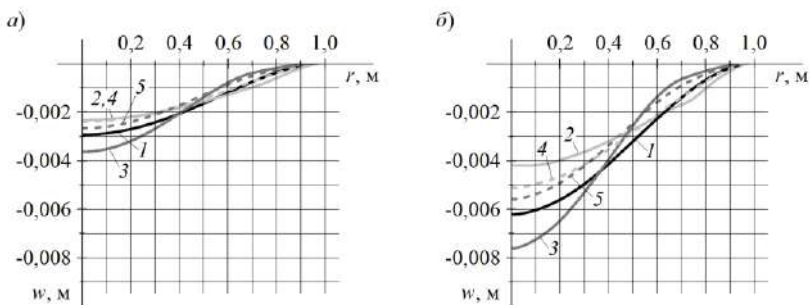


**Рисунок 5 – Изменение прогиба в центре пластины**  
***a* – пакет «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»; *б* – пакет «сталь–фторопласт-4–сталь»;**  
***в* – пакет «сталь–ПС-1–сталь»**

Рассмотренные пакеты: «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т», «сталь–фторопласт-4–сталь» и «сталь–ПС-1–сталь». Значения толщин наружных слоёв:  $h_{1(I)} = h_{2(I)} = 0,04$  м,  $h_{1(II)} = h_{2(II)} = 0,02$  м (пластины имеют уширение в центральной части). Толщина срединного заполнителя –  $h_3 = 0,3$  м.

Приведённые графики иллюстрируют, что при увеличении модуля объёмной деформации внешних слоёв в 2,4 раза прогиб пластин рассматриваемой геометрии уменьшился в среднем 2,35 раза (рис. *a* и *б*). При уменьшении модуля объёмной деформации срединного заполнителя в 34,5 раза прогиб пластины увеличивается в 1,1 раз (рис. *б* и *в*).

На рисунке 6 представлены графики изменения прогибов вдоль радиуса пакетов «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т» различной формы, но равной материалоемкости. Толщина срединного заполнителя и величина внешней нагрузки – прежние. Толщина плоского внешнего слоя пластин –  $h_{1,2} = 0,03$  м. Толщина ступенчатого внешнего слоя на наиболее узком участке составляет  $h_{1,2(I), II)} = 0,02$  м, на наиболее широком –  $h_{1,2(I), II)} = 0,04$  м. Радиус центрального участка –  $R_I = 0,707R_{II}$ .



1 – пластина с постоянной толщиной всех слоёв;

2 – пластина со ступенчатым уширением верхнего и нижнего слоя в центральной части;

3 – пластина со ступенчатым сужением верхнего и нижнего слоя в центральной части;

4 – пластина со ступенчатым уширением верхнего слоя в центральной части;

5 – пластина со ступенчатым сужением верхнего слоя в центральной части

### Рисунок 6 – Изменение прогиба пластины «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т»

*а* – квазистатическое деформирование; *б* – динамическое деформирование

Графики динамического деформирования соответствуют моменту достижения первого максимального прогиба при колебаниях.

Из приведённых графиков видно, что динамическое нагружение конструкции приводит к увеличению прогиба, возникающего в пластине, в среднем в 2,3 раза в сравнении с прогибом пластины при квазистатическом нагружении. При условии равной материалоемкости пластина со ступенчатым уширением внешних слоёв в центральной части при квазистатическом деформировании имеет на 20% меньший прогиб, чем пластина с постоянной толщиной всех слагающих пакет слоёв; при динамическом внешнем воздействии – на 32%.

На рисунке 7 представлены графики изменения прогибов пластины «Д16Т–фторопласт-4–Д16Т» во времени при различной длительности внешнего воздействия. Продолжительность приложения нагрузки  $\tau_q$  привязана к первой частоте собственных колебаний пластин  $\omega_0$ . Интенсивность каждого внешнего воздействия  $q_{0(I)} = q_{0(II)} = -100$  кПа.

Рассматриваемая пластина имеет уширение в центральной части. Радиус центрального участка I составляет половину общего радиуса пластины ( $R_I = 0,5R_{II}$ ). Толщины слоёв и максимальная интенсивность внешнего воздействия – прежние.

Из приведённых графиков видно, что длительность приложения ударной нагрузки оказывает весомое влияние на амплитуду свободных колебаний (рис. *а*). В то время как длительность приложения кратковременной линейно-убывающей нагрузки не оказывает влияние на амплитуду свободных колебаний (рис. *б*). Здесь определяющим величину прогибов пластины фактором является лишь интенсивность нагрузки в начальный момент её приложения.

При варьировании длительностью приложения внешнего кратковременного воздействия и интервалом между воздействиями для многократно повторной ударной нагрузки можно смоделировать явления, схожие с резонансом (рисунок 8).



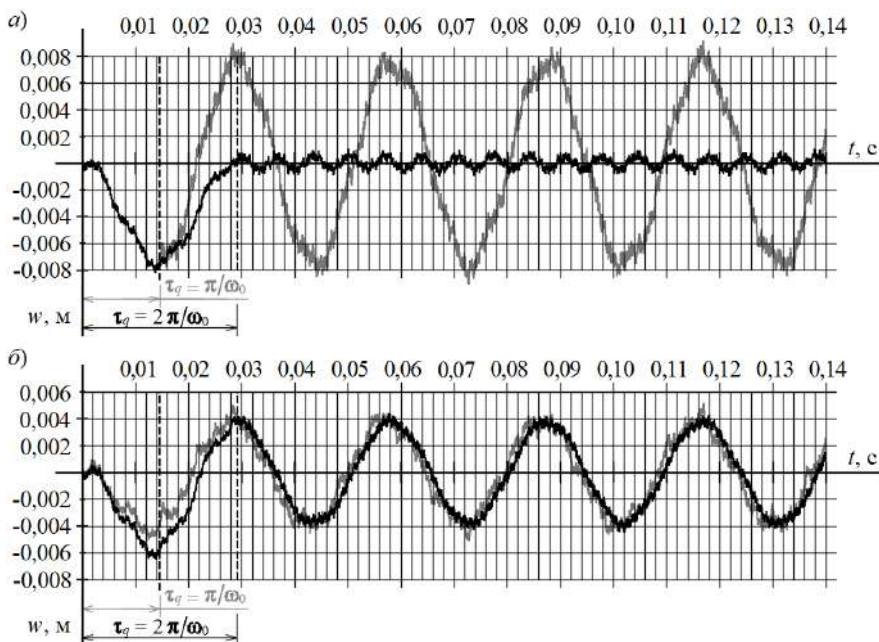


Рисунок 7 – Колебания, возбуждаемые  
 а – ударной нагрузкой; б – линейно-убывающей нагрузкой

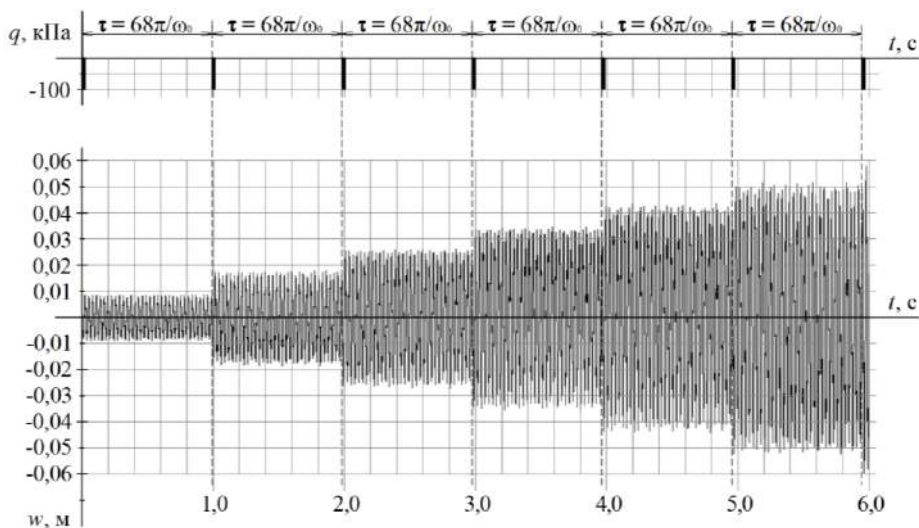


Рисунок 8 – Изменение прогиба пластины  
 при приложении многократно повторной ударной нагрузки

Для этого интервал между ударными воздействиями  $\tau = k\pi/\omega_0$  должен быть выражен с помощью натурального чётного значения коэффициента  $k$ , длительность приложения каждого воздействия  $\tau_q = k_q\pi/\omega_0$  должна быть выражена с помощью натурального нечётного значения коэффициента  $k_q$ .

Для случая многократно повторной линейно убывающей внешней нагрузки критерием постоянного нарастания амплитуды прогибов будет служить лишь чётное значение коэффициента  $k$  в выражении для временного интервала между последовательными нагружениями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

В ходе теоретического исследования поперечных колебаний круговой трёхслойной пластины с переменной толщиной внешних слоёв были получены следующие новые научные результаты:

- механико-математическая модель осесимметричных колебаний круговой трёхслойной пластины с произвольным функциональным изменением толщины внешних слоёв, *включающая* начальные и граничные условия, уравнения движения в усилиях и уравнения движения в перемещениях, содержащие координатные функции коэффициентов, зависящих от плотности материалов и упругих характеристик слоёв, и *отличающиеся* учётом инерции продольных колебаний и инерции вращения нормали в слоях, что позволяет формулировать и исследовать новый класс начально-краевых задач механики тонкостенных элементов конструкций [1]–[5], [7], [9], [10];

- механико-математическая модель осесимметричных колебаний круговой трёхслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв, *включающая* начальные и граничные условия, дифференциальные уравнения движения в перемещениях, *отличающиеся* наличием дополнительных инерционных слагаемых, ранее не учитываемых в работах других авторов [1], [2], [4]–[13], [15]–[18];

- аналитические решения и параметрический анализ собственных колебаний круговой трёхслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв, *показавший*, что для трёхслойных ступенчатых элементов зависимость собственных частот от радиуса центрального участка носит нелинейный характер и определяется преобладающим влиянием совокупной массы либо жёсткости; влияние дополнительных инерционных слагаемых на частоты собственных колебаний растёт с порядковым номером частоты (процентное отклонение при их учёте и без них для первой собственной частоты  $\omega_0$  составило менее 0,5 %, для пятой  $\omega_4$  – до 15 % в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик слоев) [1], [2], [6], [8], [13], [14], [16];

▪ аналитические решения и численный параметрический анализ вынужденных поперечных колебаниях круговой трёхслойной пластины со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв, побуждаемых осесимметричным вертикальным внешним воздействием различной локализации, длительности и изменяемости во времени, *показавший*, что динамическое нагружение конструкций приводит к увеличению прогиба в среднем в 2,3 раза в сравнении с прогибом пластины при квазистатическом нагружении (по данным исследованных пакетов); при условии равной деформативности, материалоемкость внешних слоёв пластины с сужением в центральной части на 18 % выше материалоемкости внешних слоёв пластины с уширением в центре (по данным исследованных пакетов); пластина с уширением в центральной части имеет меньший прогиб по сравнению с прогибом пластины постоянной толщины той же материалоемкости: на 20 % – при квазистатическом нагружении, на 13–32 % – при динамическом (в зависимости от материалов исследуемых пакетов); длительность приложения ударной нагрузки оказывает весомое влияние на амплитуду последующих свободных колебаний, в то время как амплитуда свободных колебаний при восприятии линейно-убывающего воздействия не зависит от длительности его приложения и определяется лишь интенсивностью в начальный момент времени [4]–[8], [16]–[20].

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Предложенные постановки и решения начально-краевых задач позволят проводить численный параметрический анализ напряжённо-деформированного состояния слоистых элементов конструкций ступенчато-переменной толщины.

Результаты численного эксперимента могут быть использованы при разработке практических рекомендаций для проектирования слоистых систем, что в свою очередь будет содействовать исключению материальных затрат, требуемых на проведение натурных экспериментов.

Результаты исследований использованы в образовательном процессе при чтении лекций по курсу «Теория упругости и пластичности» студентам факультета «Промышленное и гражданское строительство» специальности 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство». Отдельные результаты приняты к внедрению в расчётную практику отдела капитального строительства и проектирования РУП «Гомельское отделение Белорусской железной дороги» для оценки напряжений, внутренних усилий и перемещений, возникающих в композитных дисках покрытий и перекрытий, включающих прослойки теплоизоляционных или звукоизоляционных материалов.

Результаты внедрения подтверждены соответствующими актами.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

### *Статьи в рецензируемых научных изданиях*

1. Маркова М.В. Инерционная математическая модель динамического формирования круговой трёхслойной ступенчатой пластины // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2021. – № 6 (129). – С. 164–170.
2. Маркова М.В. Собственные колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 147–158.
3. Маркова М.В., Леоненко Д.В. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трёхслойной пластины переменной толщины // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – 2022. – Вып. 36. – С. 3–10.
4. Маркова М.В. Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2022. – №3 (132). – С. 121–127.
5. Маркова М.В. Вынужденные колебания круговой трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины, побуждаемые ударным воздействием // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – №3 (52). – С. 28–36. – DOI: 10.54341/20778708\_2022\_3\_52\_28.
6. Леоненко Д.В., Маркова М.В. Колебания круговой трёхслойной ступенчатой пластины при ударном периодическом воздействии // Механика машин, механизмов и материалов. – 2022. – №3 (60). – С. 68–76. – DOI: 10.46864/1995-0470-2022-3-60-68-76.
7. Маркова М.В. Напряжённо-деформированное состояние круговой трёхслойной ступенчатой пластины при вынужденных колебаниях // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 134–146.
8. Леоненко Д.В., Маркова М.В. Колебания круговой трёхслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63. – DOI: 10.33581/2520-6508-2023-1-49-63. (Scopus)

### *Материалы конференций*

9. Маркова М.В. Математическая модель колебаний круговой трёхслойной пластины переменной толщины // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы XXIV Респ. науч. конф. студентов и аспирантов / гл. ред. С.П. Жогаль; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель, 2021. – С. 58–59.
10. Маркова М.В. Механико-математическая модель колебаний круговой трёхслойной пластины переменной толщины // Актуальные вопросы физики и

техники: Материалы X Респ. науч. конф. студентов, магистрантов и аспирантов / гл. ред. Д.Л. Коваленко; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Ч. 1. – Гомель, 2021. – С. 308–310.

11. Маркова М.В. Уравнения движения трёхслойной круговой пластины переменной толщины // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXVII Междунар. симпоз. им. А.Г. Горшкова / Московский авиационный ин-т. – Т. 1. – М.: ООО «ТРП», 2021. – С. 157–158.

12. Маркова М.В. Уравнения движения трёхслойной круговой ступенчатой пластины // XIII Белорусская математическая конференция: Материалы Междунар. науч. конф. / сост.: В.В. Лепин; Нац. академия наук Беларуси, Ин-т математики, Бел. гос. ун-т. – Ч. 1. – Минск, 2021. – С. 68–69.

13. Маркова М.В. Сравнение различных инерционных математических моделей динамического деформирования круговых трёхслойных пластин // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XI Междунар. науч.-практ. конф. / под общ. ред. Ю.И. Кулаженко; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. – Ч. 2. – Гомель: БелГУТ, 2021. – С. 154–155.

14. Маркова М.В. Определение частот собственных колебаний круговой трёхслойной ступенчатой пластины // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы XXV Респ. науч. конф. студентов и аспирантов / гл. ред. С.П. Жогаль; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель, 2022. – С. 4–5.

15. Маркова М.В. Механико-математическая модель колебаний круговой трёхслойной ступенчатой пластины // Актуальные вопросы физики и техники: Материалы XI Респ. науч. конф. студентов, магистрантов и аспирантов / гл. ред. Д.Л. Коваленко; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Ч. 1. – Гомель, 2022. – С. 204–207.

16. Маркова М.В., Леоненко Д.В. Функция прогиба круговой трёхслойной пластины при вынужденных колебаниях // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXVIII Междунар. симпоз. им. А.Г. Горшкова / Московский авиационный ин-т. – Т. 2. – М.: ООО «ТРП», 2022. – С. 77–79.

17. Маркова М.В. Перемещения при вынужденных колебаниях кругового трёхслойного элемента со ступенчато-переменной толщиной // Строительство и восстановление искусственных сооружений: Материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф. / гл. ред. С.М. Бобрицкий; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2022. – С. 287–289.

18. Маркова М.В. Механико-математическая модель деформирования трёхслойной пластины ступенчато-переменной толщины при восприятии многократно-повторной нагрузки // Проблемы безопасности на транспорте: Материалы XII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д. / под общ. ред.

Ю.И. Кулаженко; М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Беларус. гос. ун-т трансп. – Ч. 2. – Гомель: БелГУТ, 2022. – С. 209–211.

19. Маркова М.В. Колебания трёхслойной пластины, возбуждаемые повторной ритмичной нагрузкой // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы XXVI Респ. науч. конф. студентов и аспирантов / гл. ред. С.П. Жогаль; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Ч.1. – Гомель, 2023. – С. 63–64.

20. Маркова М.В. Сравнение деформативности трёхслойной пластины при квазистатическом и динамическом нагружении // Актуальные вопросы физики и техники: Материалы XII Респ. науч. конф. студентов, магистрантов и аспирантов / гл. ред. Д.Л. Коваленко; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Ч. 1. – Гомель, 2023.– С. 224–277.

## РЕЗЮМЕ

Маркова Марина Владимировна

### **Колебания трёхслойной круговой пластины переменной толщины**

*Ключевые слова:* круговая трёхслойная пластина, трёхслойная пластина переменной толщины, трёхслойная пластина со ступенчато-переменной толщиной внешних слоёв, колебания

Представлена механико-математическая модель колебаний круговой трёхслойной пластины, включающая в себя уравнения движения в усилиях и перемещениях, начальные и граничные условия и отличающаяся учётом изменчивости толщины наружных слоёв пакета. Приведённые уравнения движения применимы также к трёхслойным пластинам с постоянной толщиной всех составляющих пакет слоёв и отличаются от уравнений движения, используемых в работах других авторов, наличием дополнительных инерционных слагаемых.

Получены аналитические решения начально-краевых задач о собственных и вынужденных поперечных колебаниях, возбуждаемых в круговой трёхслойной пластине со ступенчатым изменением толщины внешних слоёв осесимметричными вертикальными внешними воздействиями различной локализации, длительности и изменчивости во времени. Представленные решения включают в себя расчётные формулы для определения собственных частот колебаний, перемещений, напряжений и деформаций при квазистатическом и динамическом нагружении пластин.

Приведены результаты численной апробации полученных аналитических решений и параметрического анализа напряжённо-деформированного состояния, устанавливающие зависимость собственных частот, перемещений и напряжений от геометрии пластины, свойств материалов пакета и вида внешнего воздействия.

## РЭЗІЮМЭ

Маркава Марына Уладзіміраўна

### Ваганні трохслаёвай кругавой пласціны зменнай таўшчыні

*Ключавыя словы:* кругавая трохслаёвая пласціна, трохслаёвая пласціна зменнай таўшчыні, трохслаёвая пласціна са ступеніста-зменнай таўшчынёй знешніх слаёў, ваганні

Прадстаўлена механіка-матэматычная мадэль ваганняў кругавой трохслаёвай пласціны, якая ўключае ў сябе ўраўненні руху ў намаганнях і перамяшчэннях, пачатковыя і межавыя ўмовы і адрозніваецца ўлікам змяняльнасці таўшчыні знешніх слаёў пакета. Прыведзеныя ўраўненні руху прыдатны таксама да трохслаёвых пласцін з пастаяннай таўшчынёй усіх складаючых пакет слаёў і адрозніваюцца ад ураўненняў руху, якія выкарыстоўваюцца ў працах іншых аўтараў, наяўнасцю дадатковых інэрцыйных складнікаў.

Атрыманы аналітычныя рашэнні пачаткова-краевых задач аб уласных і вымушаных папярочных ваганнях, выкліканых у кругавой трохслаёвай пласціне са ступеністым змяненнем таўшчыні знешніх слаёў восесіметрычнымі вертыкальнымі знешнімі ўздзеяннямі рознай лакалізацыі, працягласці і змяняльнасці ў часе. Прадстаўленыя рашэнні ўключаюць у сябе разліковыя формулы для вызначэння ўласных частот ваганняў, перамяшчэнняў, напружанняў і дэфармацый пры квазістатычным і дынамічным нагружэнні пласцін.

Прыведзены вынікі лічбавай апрацыі атрыманых аналітычных рашэнняў і параметрычнага аналізу напружана-дэфармаванага стану, якія вызначаюць залежнасць ўласных частот, перамяшчэнняў і напружанняў ад геаметрыі пласціны, уласцівасцей матэрыялаў пакета і выгляду знешняга ўздзеяння.



## SUMMARY

Markova Marina Vladimirovna

### **Vibrations of a three-layer variable thickness circular plate**

*Keywords:* three-layer circular plate, three-layer variable thickness plate, three-layer plate with step-variable thickness of the outer layers, vibrations

A mechanical and mathematical model of oscillations of a three-layer circular plate, which includes the equations of motion in forces and displacements, initial and boundary conditions and differs by taking into account the variability of the thickness of the outer layers of the sandwich, is presented. The above equations of motion are also applicable to sandwich with a constant thickness of all the layers and differ from the equations of motion used in the works of other authors by additional inertial summands.

Analytical solutions are obtained for initial-boundary value problems of natural and forced transverse vibrations, which are induced in a three-layer circular plate with a step-variable thickness of the outer layers by axisymmetric vertical exposure of various localization, period and variability in time, are obtained. The solutions include calculation formulas for determining the natural frequencies of vibrations, displacements, stresses and deformations under quasi-static and dynamic loading of plates.

The results of numerical approbation of the obtained analytical solutions and parametric analysis of the stress-strain state, which establish the dependence of natural frequencies, displacement and stress on the geometry of the plate, the materials properties and the type of exposure, are given.