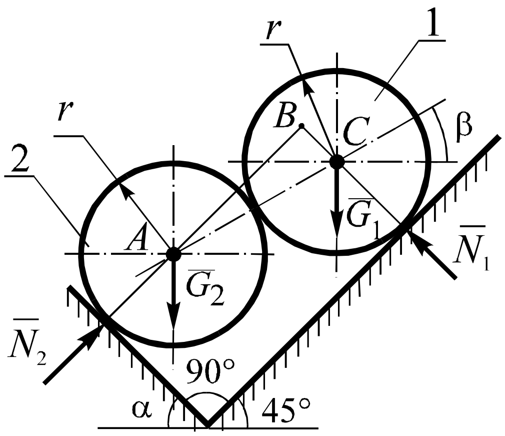
Задача С-1–2020



1. Гладкие поверхности. Smooth surface

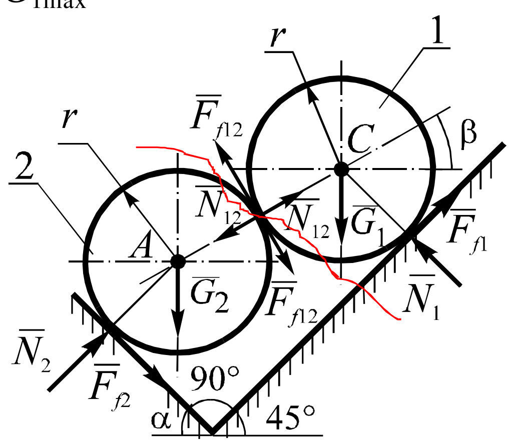
$$\sum M_{iB}=0;\ G_2AB\cos45° - G_1BC\cos45°=0$$

$$AB=AC\cos15°;\ BC=AC\sin15°$$

$$G_2AC\cos15° - G_1AC\sin15°=0$$

$$G_1 = G_2\cot15° = \left(2+\sqrt{3}\right)G_2$$

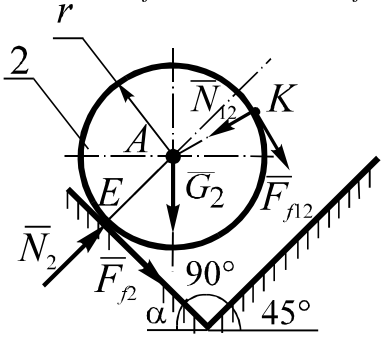
2. а) Определение $G_{1\max}$



$$\sum M_{iC}=0;\quad F_{f1}\cdot r - F_{f12}\cdot r = 0 \quad\Rightarrow\quad F_{f1} = F_{f12}$$

$$\sum M_{iA}=0;\quad F_{f2}\cdot r - F_{f12}\cdot r = 0 \quad\Rightarrow\quad F_{f2} = F_{f12}$$

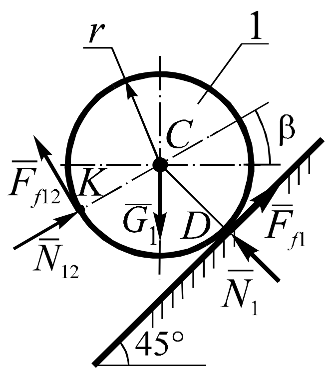
$$F_{f1} \le fN_1;\qquad F_{f12} \le fN_{12};\qquad F_{f2} \le fN_2$$



$$\sum M_{iE}=0;\quad -G_2r\sin45^\circ + N_{12}r\sin15^\circ + F_{f12}(r + r\cos15^\circ) = 0 \tag{1}$$

$$\sum M_{iK}=0;\quad G_2 r\cos 30^\circ - N_2 r\sin 15^\circ + F_{f2}(r + r\cos 15^\circ) = 0$$

При подстановке $F_{f12}=fN_{12}$ и $F_{f2}=fN_2$ получим, что $N_2>N_{12}$. Следовательно, учитывая F_{f2} = F_{f12}, получаем, что проскальзывание не может начаться в точке E.



$$\sum M_{iD}=0;\quad G_1 r\sin 45^\circ - N_{12} r\cos 15^\circ - F_{f12}(r + r\sin 15^\circ) = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_{iK}=0;\quad -G_1 r\cos 60^\circ + N_1 r\cos 15^\circ + F_{f1}(r + r\sin 15^\circ) = 0 \qquad (3)$$

При подстановке $F_{f12}=fN_{12}$ и $F_{f1}=fN_1$ получим, что $N_{12}>N_1$. Следовательно, учитывая F_{f1} = F_{f12}, получаем, что проскальзывание не может начаться в точке K. То есть выход из равновесия связан с началом скольжения в точке D.

Таким образом, $F_{f2} < fN_2$; $F_{f12} < fN_{12}$; $F_{f1} = fN_1$.

Совместно решая уравнения (1) и (2), получаем

$$G_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_{12}\cos 15° - F_{f12}(1+\sin 15°) = 0$$

$$-G_2\frac{\sqrt{2}}{2} + N_{12}\sin 15° + F_{f12}(1+\cos 15°) = 0$$

$$N_{12} = \frac{G_1\dfrac{\sqrt{2}}{2} - F_{f12}(1+\sin 15°)}{\cos 15°}$$

$$-G_2\frac{\sqrt{2}}{2} + G_1\frac{\sqrt{2}}{2}\tan 15° - F_{f12}(1+\sin 15°)\tan 15° + F_{f12}(1+\cos 15°)\tan 15° = 0$$

$$F_{f12} = \frac{G_1\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tan 15° - G_2\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{(1+\cos 15°) - (1+\sin 15°)\tan 15°}.$$

С другой стороны, из уравнения (3)

$$-G_1\cos 60^\circ + \frac{F_{f1}}{f}\cos 15^\circ + F_{f1}(1+\sin 15^\circ) = 0;$$

$$-G_1\cos 60^\circ + \frac{F_{f1}}{f}\cos 15^\circ + F_{f1}(1+\sin 15^\circ) = 0$$

$$F_{f1} = \frac{fG_1\cos 60°}{\cos 15° + f(1+\sin 15^\circ)}$$

Учитывая, что $F_{f1} = F_{f12}$, получаем

$$\frac{fG_1\cos 60°}{\cos 15° + f(1+\sin 15^\circ)} = \frac{G_1\frac{\sqrt{2}}{2}\tan 15° - G_2\frac{\sqrt{2}}{2}}{(1+\cos 15°) - (1+\sin 15°)\tan 15°};$$

$$fG_1\big((1+\cos 15°) - (1+\sin 15°)\tan 15°\big) = \big(G_1\sqrt{2}\tan 15° - G_2\sqrt{2}\big)\big(\cos 15° + f(1+\sin 15^\circ)\big);$$

$$G_2\sqrt{2}\big(\cos 15° + f(1+\sin 15^\circ)\big) =$$

$$= G_1\sqrt{2}\tan 15°\big(\cos 15° + f(1+\sin 15^\circ)\big) - fG_1\big((1+\cos 15°) - (1+\sin 15°)\tan 15°\big).$$

Окончательно получаем

$$G_{1\max} = \frac{G_2\sqrt{2}\big(\cos 15° + f(1+\sin 15^\circ)\big)}{\sqrt{2}\tan 15°\big(\cos 15° + f(1+\sin 15^\circ)\big) - f\big((1+\cos 15°) - (1+\sin 15°)\tan 15°\big)}.$$

б) Определение $G_{1\min}$

В этом случае направления сил трения меняются на противоположные.

Проводя аналогичные рассуждения можно показать, что при начале скольжения в точке D получится выражение, в котором знак перед f в формуле $G_{1\max}$ надо поменять на противоположный

$$G_{1\min} = \frac{G_2\sqrt{2}\big(\cos 15° - f(1+\sin 15^\circ)\big)}{\sqrt{2}\tan 15°\big(\cos 15° - f(1+\sin 15^\circ)\big) + f\big((1+\cos 15°) - (1+\sin 15°)\tan 15°\big)}.$$

Ответом задачи является диапазон от $G_{1\min}$ до $G_{1\max}$.

Отметим, что полученные формулы справедливы для малых коэффициентов трения f. При больших значениях f следует дополнительно произвести анализ, связанный с возможностью начала скольжения в точке E при определении $G_{1\min}$, а также проверить возможность заклинивания цилиндров.