

УДК 691-419:539.374

*Е. А. ЛАЧУГИНА*

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь*

## **СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ**

Разработана математическая модель для нахождения частот собственных колебаний пятислойной несимметричной по толщине круговой пластины при различных вариантах закрепления контура. Предполагается, что для тонких несущих слоев справедлива гипотеза Кирхгофа, а для менее прочных легких заполнителей – гипотеза Тимошенко. Получены трансцендентные уравнения для исследования собственных чисел в зависимости от граничных условий, приведена формула для нахождения частот колебаний. Выполнен численный анализ влияния толщины внутреннего несущего слоя и упругих характеристик материалов слоев на собственные числа и частоты.

**Ключевые слова:** круглая пятислойная пластина, несимметричная по толщине пластина, собственные числа, собственные частоты.

**Введение.** Композитные конструкции, в частности пластины, находят широкое применение в различных областях современной техники: космической, авиационной, кораблестроительной; промышленном, гражданском и транспортном строительстве; химическом и энергетическом машиностроении. Поэтому актуально создание расчетных механико-математических моделей динамического деформирования тонкостенных элементов конструкции.

Методы расчета и постановки краевых задач статики и динамики трехслойных элементов конструкций приведены в монографиях [1–4]. Модели строятся на кинематических гипотезах ломаной линии, деформирование материалов подчиняется закону Гука или теории малых упругопластических деформаций. В моделях статики заполнители принимаются жесткими, воспринимающими нагрузку в тангенциальном направлении. Для динамических задач заполнители считаются легкими, пренебрегается работой касательных напряжений. В статье [5] рассмотрена задача о деформировании различными нагрузками трехслойного стержня в стационарном температурном поле. Показано, что относительный сдвиг в заполнителе от температуры не зависит. Работа [6] посвящена исследованию влияния сжимаемости заполнителя на квазистатическое деформирование трехслойной пластины. Функция сжимаемости заполнителя принята линейной по его толщине. Деформирование круглой пластины при нагружении в своей плоскости исследовано в [7]. Особенности деформирования круглых трехслойных пластин на упругих основаниях Винклера и Пастернака рассмотрены в публикациях [8, 9], где исследовано влияние сдвиговых свойств основания на НДС пластины. Изгиб пятислойной круговой симметричной по толщине пластины рассмотрен в [10, 11].

Собственные колебания и контактные задачи для неоднородных цилиндрических оболочек исследованы в статьях [12, 13]. Вынужденные колебания трехслойных круговых пластин под действием различного рода локальных нагрузок изучены в [14]. Собственные колебания симметричной по толщине пятислойной пластины исследовались в работах [15–17].

В данной работе решается начально-краевая задача о собственных колебаниях несимметричной по толщине пятислойной пластины с двумя легкими заполнителями при различных вариантах закрепления ее контура и материалах несущих слоев.

**1 Уравнения свободных колебаний несимметричной пластины.** Рассматривается упругая пятислойная круговая пластина, состоящая из трех несущих слоев и двух заполнителей. Постановка задачи осуществляется в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  (рисунок 1), которая базируется на срединной плоскости внутреннего несущего слоя. Пластина несимметрична по толщине, искомыми функциями в начально-краевой задаче являются радиальное перемещение координатной поверхности  $u(r, t)$ , относительные сдвиги в заполнителях  $\psi_1(r, t)$ ,  $\psi_2(r, t)$  и прогиб  $w(r, t)$ . Предполагается, что на контуре пластины расположена жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев.

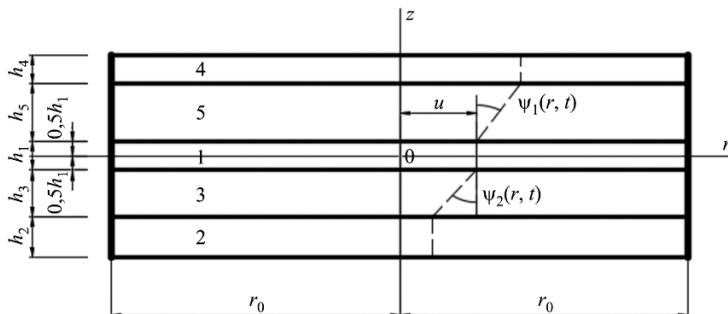


Рисунок 1 – Пятислойная пластина

Модель деформирования пластины основана на дискретно-структурном подходе, предполагающем применение различных гипотез для каждого слоя в отдельности. Так, тонкие внешние слои 1, 2, 4 обладают большой жесткостью на сдвиг и их деформирование подчиняется классическим гипотезам Кирхгофа. Относительно толстые заполнители 3, 5 подвержены сдвиговым деформациям и для описания их поведения при изгибе используется гипотеза Тимошенко. Слои пластины несжимаемы в поперечном направлении. Относительное проскальзывание между слоями отсутствует. В целом принятую систему гипотез называют «гипотезой ломаной линии» (англ. *zig-zag theory*).

Полагается, что напряжения и деформации в слоях связаны соотношениями линейной теории упругости:

$$s_{\alpha\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = K_k \theta^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi);$$

$$s_{rz}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{rz}^{(k)} \quad (k = 3, 5), \quad (1)$$

где  $G_k, K_k$  – модули сдвига и объемной деформации материалов слоев;  $s_{\alpha\beta}^{(k)}, \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$  – девиаторные,  $\sigma^{(k)}, \theta^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $k = 1, \dots, 5$  – номер слоя.

С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений в частных производных, которая описывает свободные колебания рассматриваемой пластины. Она имеет вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u - a_2 w, r + a_3 \Psi_1 - a_4 \Psi_2) &= 0; \\ L_2(a_3 u - a_5 w, r + a_6 \Psi_1) &= 0; \\ L_2(-a_4 u - a_7 w, r + a_8 \Psi_2) &= 0; \\ L_3(a_2 u - a_9 w, r + a_5 \Psi_1 + a_7 \Psi_2) - M_0 \ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе соответствует дифференцированию по следующей за ней координате;  $M_0 \ddot{w}$  – инерционные поперечные силы;  $\rho_k$  – плотность материала слоя; коэффициенты

$$\begin{aligned} M_0 &= r_0^2 \sum_{k=1}^5 \rho_k h_k; \quad a_1 = \sum_{k=1}^5 h_k K_k^+; \\ a_2 &= [K_4^+ h_4 (0,5 h_4 + 0,5 h_1 + h_5) + K_5^+ 0,5 h_5 (h_1 + h_5) - \\ &- K_3^+ 0,5 h_3 (h_1 + h_3) - K_2^+ h_2 (0,5 h_2 + 0,5 h_1 + h_3)]; \quad a_3 = [K_4^+ h_4 h_5 + K_5^+ 0,5 h_5^2]; \\ a_4 &= [K_2^+ h_2 h_3 + K_3^+ 0,5 h_3^2]; \quad a_5 = \left[ K_4^+ h_4 h_5 (0,5 h_1 + 0,5 h_4 + h_5) + K_5^+ h_5 \left( \frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right) \right]; \\ a_6 &= \left[ K_4^+ h_5^2 h_4 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3} \right]; \quad a_7 = \left[ K_2^+ h_2 h_3 (0,5 h_1 + 0,5 h_2 + h_3) + K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right]; \\ a_8 &= \left[ K_2^+ h_3^2 h_2 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right]; \quad a_9 = \left[ K_4^+ h_4 \left( \frac{h_4^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_5^2 + \frac{h_1 h_4}{2} + h_4 h_5 + h_1 h_5 \right) + \right. \\ &+ K_5^+ h_5 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + K_3^+ h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + \\ &+ K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_2^+ h_2 \left( \frac{h_2^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_3^2 + \frac{h_1 h_2}{2} + h_2 h_3 + h_1 h_3 \right) \left. \right]; \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k. \end{aligned}$$

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям (2) условий ограниченности решения в центре пластины и граничных условий на контуре  $r = r_0$ :

$$\text{при его заделке} \quad u = \psi_1 = \psi_2 = w = w_{,r} = 0; \quad (3)$$

$$\text{при шарнирном опирании} \quad u = \psi_1 = \psi_2 = w = M_r = 0. \quad (4)$$

После ряда преобразований, связанных с получением отдельного уравнения для прогиба  $w$  пластины, система (2) приобретает вид

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad \psi_1 = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r; \\ \psi_2 &= b_3 w_{,r} + C_5 r + C_6 / r; \quad L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $C_1, \dots, C_6$  – константы интегрирования; коэффициенты

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_8(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7}{a_8(a_1 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6}; \quad b_2 = \frac{a_3(a_2 a_8 + a_4 a_7) + a_5(a_1 a_8 - a_4^2)}{a_3^2 a_8 - a_6(a_1 a_8 - a_4^2)}; \\ b_3 &= \frac{a_4(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_7(a_1 a_6 - a_3^2)}{a_8(a_1 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6}; \quad M^4 = M_0 D; \quad D = \frac{a_6 a_8 b_4}{b_4 b_6 - b_5^2}; \\ b_4 &= a_8(a_2 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6; \quad b_5 = a_8(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7; \\ b_6 &= a_8(a_6 a_9 - a_5^2) - a_6 a_7^2. \end{aligned}$$

Поскольку искомое решение ограничено в начале координат, то для сплошных пластин должно выполняться условие  $C_2 = C_4 = C_6 = 0$ .

Определяемый прогиб принимаем в виде произведения координатной функции  $v(r)$  и функции времени:

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (6)$$

где  $\omega$  – частота собственных колебаний пластины;  $A$  и  $B$  – константы, определяемые из начальных условий движения.

Подстановка выражения (6) в последнее уравнение системы (5) приводит к бибесселеву уравнению для определения координатной функции  $v(r)$ :

$$L_3(v_{,r}) - \beta^4 v = 0, \quad (7)$$

где  $\beta^4 = M^4 \omega^2$  – собственные числа оператора  $L_3$ .

Решение уравнения (7) известно [17]:

$$v(\beta r) = C_3 J_0(\beta r) + C_4 I_0(\beta r) + C_5 Y_0(\beta r) + C_6 K_0(\beta r). \quad (8)$$

Трансцендентное уравнение для собственных чисел  $\beta_n$  оператора  $L_3$  в случае заделки контура, которое следует из (3) и (8), имеет такой же вид, как и для симметричной пластины [17]:

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0. \quad (9)$$

При шарнирно опертом контуре выполнение условий (4) приводит к следующему трансцендентному уравнению для определения собственных чисел:

$$\begin{aligned}
& J_0(\beta r_0) \left[ a_{10} \left( \beta I_0(\beta r_0) - \frac{I_1(\beta r_0)}{r_0} \right) + \frac{a_{11}}{r_0} I_1(\beta r_0) \right] + \\
& + I_0(\beta r_0) \left[ a_{10} \left( \beta J_0(\beta r_0) - \frac{J_1(\beta r_0)}{r_0} \right) + \frac{a_{11}}{r_0} J_1(\beta r_0) \right] = 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

где  $a_{10} = a_9 - a_2 b_1 - a_5 b_2 - a_7 b_3$ ,  $a_{11} = a_{90} + a_2 b_1 + a_5 b_2 + a_7 b_3$ ;

$$\begin{aligned}
a_{90} = & \left[ K_4^- h_4 \left( \frac{h_4^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_5^2 + \frac{h_1 h_4}{2} + h_4 h_5 + h_1 h_5 \right) + K_5^- h_5 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + \right. \\
& \left. + K_3^- h_3 \left( \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + K_2^- h_2 \left( \frac{h_2^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_3^2 + \frac{h_1 h_2}{2} + h_2 h_3 + h_1 h_3 \right) \right]; \\
& K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3} G_k.
\end{aligned}$$

После нахождения собственных чисел  $\beta_n$  частоты собственных колебаний определяются из соотношения, введенного в (7):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}. \quad (11)$$

**3 Численные результаты** получены для защемленной и шарнирно опертой по контуру несимметричных по толщине пластин. Геометрические размеры слоев отнесены к радиусу  $r_0 = 1$  м. Сравнение проведено с симметричной по толщине базовой моделью пластины Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т. Изменялись толщины слоев и материалы. Вычисления проведены с использованием математического пакета Maple.

В таблице 1 приведены первые 13 собственных чисел  $\beta_n$  и собственных частот колебаний  $\omega_n$  для случая шарнирно опертого контура пластины.

*Таблица 1 – Собственные числа и частоты пятислойной пластины при шарнирно опертом ее контуре*

Номер $n$	$\beta_n / \omega_n$	Номер $n$	$\beta_n / \omega_n$
0	3,165 / 218,821	7	24,940 / 13587,361
1	6,248 / 852,755	8	28,063 / 17203,246
2	9,354 / 1911,336	9	31,186 / 21245,235
3	12,466 / 3394,661	10	34,311 / 25716,3284
4	15,582 / 5303,818	11	37,436 / 30614,070
5	18,700 / 7638,805	12	40,562 / 35940,236
6	21,819 / 10399,486	13	43,690 / 41697,142

На рисунках 2, 3 представлены графики зависимости частоты основного тона  $\omega_0$  от толщины внутреннего несущего слоя  $h_1$  для защемленной и шарнирно опертой пластины соответственно.

Рисунок 2, *а* показывает изменение частоты  $\omega_0$  при перераспределении материалов между слоями у пластины Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т: 1 –  $h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ; 2 –  $h_2 = 0,01$ ,  $h_4 = 0,03$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ; 3 –  $h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = 0,05$ ,  $h_5 = 0,15$ . Перенос материала из нижнего несущего слоя в верхний приводит к росту собственной частоты  $\omega_0$  (2) примерно на 25 % по сравнению с симметричной пластиной (1). Перераспределение материала между заполнителями 3 приводит к уменьшению частоты на 20 %.

На рисунке 2, *б* показаны графики зависимостей частот основного тона от толщины внутреннего несущего слоя  $h_1$  для различных пакетов несимметричной по толщине пластины: 1 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т; 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан; 3 – кордиерит – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан ( $h_2 = 0,03$ ,  $h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = h_5 = 0,05$ ). По мере увеличения упругих характеристик материалов слоев частота основного тона возрастает.

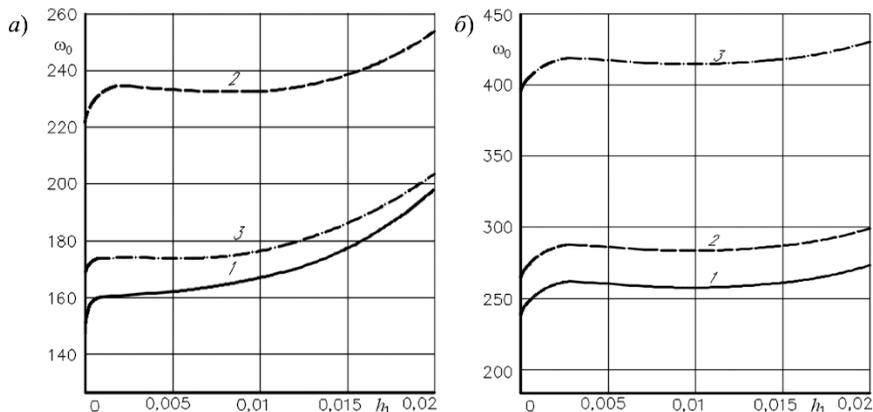


Рисунок 2 – Зависимость собственной частоты  $\omega_0$  от толщины внутреннего несущего слоя (защемленная пластина)

Рисунок 3, *а* показывает изменение частоты при перераспределении материалов Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т между слоями: 1 –  $h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ; 2 –  $h_2 = 0,01$ ,  $h_4 = 0,03$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ; 3 –  $h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = 0,05$ ,  $h_5 = 0,15$ . Здесь асимметрия пластины приводит к уменьшению исследуемой частоты.

На рисунке 3, *б* приведены графики изменения частоты основного тона  $\omega_0$  при различных пакетах пятислойной пластины: 1 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т; 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан; 3 – кордиерит – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан ( $h_2 = 0,03$ ,  $h_4 = 0,01$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ). В случае использования кордиерита в качестве материала внешнего несущего слоя частота колебаний резко уменьшается. Это обусловлено большей плотностью материала по сравнению с дюралюминием и титановым сплавом.

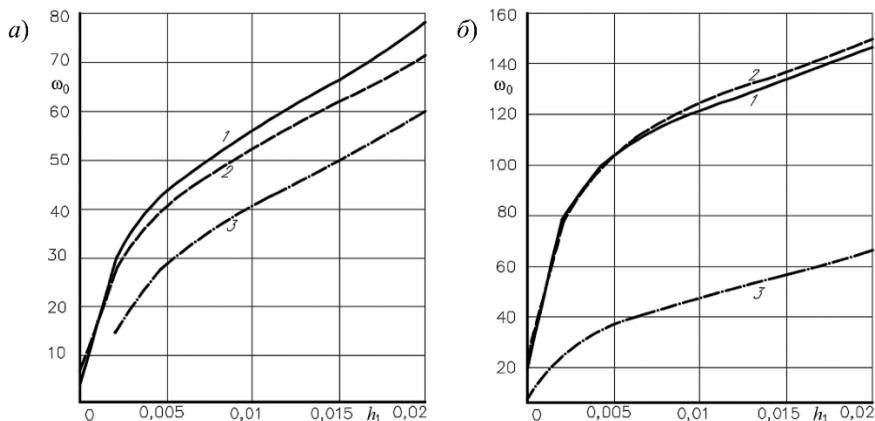


Рисунок 3 – Зависимость собственной частоты  $\omega_0$  от толщины внутреннего несущего слоя (шарнирно опертая пластина)

Отличие в поведении частоты основного тона шарнирно опертой пластины от защемленной вытекает из зависимости собственных чисел  $\beta_n$  от упругих и геометрических параметров слоев, согласно уравнению (10). В то же время собственные числа при защемленном контуре от них не зависят (9).

**Выводы.** Полученное решение начально-краевой задачи, разработанные алгоритмы и компьютерные программы позволяют численно моделировать динамическое поведение круговых пятислойных несимметричных по толщине пластин при свободных колебаниях.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T24M-004).*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.
- 3 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 4 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.
- 5 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
- 6 Захарчук, Ю. В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

7 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации.* – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

8 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // *Механика композитных материалов.* – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.

9 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации.* – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

10 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации.* – 2022. – Вып. 15. – С. 209–213.

11 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

12 **Леоненко, Д. В.** Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д. В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов.* – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

13 **Tarlovakvskii, D. V.** Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D. V. Tarlovakvskii, G. V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

14 **Starovoitov, E. I.** Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko, A. V. Yarovaya // *Strength of materials.* – 2002. – Vol. 34, no. 5. – P. 474–481.

15 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации.* – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

16 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

17 **Лачугина, Е. А.** Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации.* – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

*E. A. LACHUGINA*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **NATURAL OSCILLATION FREQUENCIES OF A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE ASYMMETRICAL IN THICKNESS**

A mathematical model is developed for finding the natural oscillations frequencies of a five-layer circular plate asymmetric in thickness for different variants of contour fastening. It is assumed that the Kirchhoff hypotheses are valid for the thin bearing layers, and the Timoshenko hypothesis is valid for the less durable lightweight fillers. Transcendental equations are obtained for studying the eigenvalues depending on the boundary conditions, and a formula for finding the oscillation frequencies is given. A numerical analysis of the effect of the inner bearing layer thickness and the layer materials elastic characteristics on the eigenvalues and frequencies is performed.

**Keywords:** circular five-layer plate, plate asymmetric in thickness, eigenvalues, eigenfrequencies.

Получено 23.10.2024