УДК 691-419:539.371

В. С. САЛИЦКИЙ
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

КРУГЛАЯ ПЯТИСЛОЙНАЯ ПЛАСТИНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКИ

Осуществлена постановка краевой задачи об изгибе симметричной по толщине упругой круглой пятислойной пластины с двумя заполнителями. Пластина подвергается воздействию равномерно распределенной кольцевой поперечной нагрузки. Деформирование внешних и внутренних тонких несущих слоев подчиняется гипотезам Кирхгофа. Для сравнительно толстых заполнителей выполняется гипотеза Тимошенко. Уравнения равновесия пластины получены вариационным методом Лагранжа с учетом работы касательных напряжений в заполнителях. Приведено точное решение поставленной краевой задачи и выполнена его численная апробация.

Ключевые слова: круглая пятислойная пластина, распределенная по кольцу нагрузка, точное решение.

Введение. В связи с возросшими современными требованиями промышленности к прочности и материалоемкости конструкций резко усилился спрос на использование композитных элементов. Поэтому разработка механико-математических моделей деформирования слоистых стержней, пластин и оболочек является актуальной задачей. Особую ценность имеют аналитические решения краевых задач для слоистых конструкций.

Различные подходы к построению моделей слоистых элементов таких конструкций описаны в монографиях [1–4], где рассматриваются особенности квазистатического и динамического деформирования. Для неупругих элементов применены соотношения теории малых упругопластических деформаций с отработанными для некоторых конструкционных материалов функциями пластичности Ильюшина. Приведены примеры решения конкретных задач для трехслойных и многослойных конструкций.

Изгибу трехслойных стержней и пластин посвящены работы [5, 6]. Кинематические гипотезы соответствуют ломаной линии: в несущих слоях по Кирхгофу, в заполнителе – Тимошенко. Приведены точные решения соответствующих задач и проведена их численная апробация. В [7, 8] исследован изгиб трехслойных пластин на основании Пастернака, в публикации [9] – неосесимметричное нагружение таких пластин в своей плоскости.

Динамическое воздействие на пятислойные пластины рассмотрено в статьях [10, 11].

Исследование деформирования круглой пятислойной симметричной по толщине пластины при непрерывных нагрузках проведено в [12–15]. Получены решения краевых задач и приведены численные результаты.

В данной работе представлены постановка и точное решение задачи об изгибе пятислойной круговой пластины под действием равномерно распределенной по кольцу нагрузки.

1 Постановка краевой задачи. Используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (рисунок 1). Гипотезы Кирхгофа принимаются для тонких высокопрочных несущих слоев: внешних с толщинами $h_2 = h_4$ и внутреннего с толщиной h_1. В этих слоях нормаль после нагружения не изменяет своей длины, остается прямолинейной и перпендикулярной деформированной срединной поверхности. В сравнительно толстых легких заполнителях, для которых $h_3 = h_5$, выполняются гипотезы Тимошенко, предполагающие наличие отклонения от перпендикуляра к деформированной срединной поверхности, называемого относительным сдвигом $\psi(r)$. Толщины слоев и радиальная координата отнесены к радиусу r_0 пластины, через $w(r)$ обозначен ее прогиб.

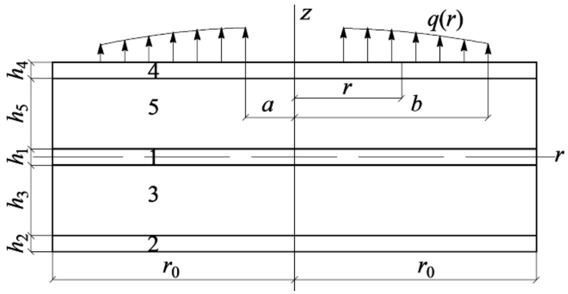

Рисунок 1 – Схема пятислойной пластины при круговой нагрузке

Предполагается, что на пластину действует кольцевая нагрузка, равномерно распределенная в области $a \le r \le b$:

$$q = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \tag{1}$$

где q_0 – интенсивность нагрузки; $H_0(x)$ – известная функция Хэвисайда; b, a – внешний и внутренний радиусы силового кольца.

Система дифференциальных уравнений равновесия для определения искомых функций $\psi(r)$ и $w(r)$ получена в [14] при непрерывной нагрузке. В случае нагрузки (1) она в перемещениях принимает вид

$$\mathrm{L}_2 (a_4\psi - a_5 w,_r) - 2h_3 G_3 \psi = 0;$$

$$\mathrm{L}_3 (a_5\psi - a_6 w,_r) = -q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \tag{2}$$

где запятой в индексе обозначена производная по радиальной координате;

$$a_4 = \left[2K_2^+ \; h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right]; \; a_5 = \left[K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{2} + \frac{2h_3^2}{3} \right) \right];$$

$$a_6=\left[2K_2^+h_2\left(\frac{h_1^2}{4}+\frac{h_1h_2}{2}+h_1h_3+\frac{h_2^2}{3}+h_2h_3+h_3^2\right)+K_1^+\frac{h_1^3}{12}+2K_3^+h_3\left(\frac{h_1^2}{4}+\frac{h_1h_3}{2}+\frac{h_3^2}{3}\right)\right];$$

$$\mathrm{L}_2(g)\equiv g,_{rr}+\frac{g,_r}{r}-\frac{g}{r^2};\ \ \mathrm{L}_3(g)\equiv g,_{rrr}+\frac{2g,_{rr}}{r}-\frac{g,_r}{r^2}+\frac{g}{r^3}.$$

Граничные условия при жесткой заделке контура

$$\psi=w=w,_r=0 \text{ при } r=1. \tag{3}$$

2 Решение краевой задачи. В общем случае нагружения решение задачи об изгибе пятислойной круговой пластины представляется в виде [12]:

$$\psi=C_2I_1(\beta r)+C_3K_1(\beta r)+\psi_r;$$

$$w=\frac{a_5}{a_6}\int\psi\,\mathrm{d}\,r+\frac{1}{a_6}\int\mathrm{L}_3^{-1}(q)\,\mathrm{d}\,r-\frac{C_1}{4a_6}r^2(\ln r-1)+\frac{C_5r^2}{4a_6}+C_6\ln r+C_4, \tag{4}$$

где $I(x)$, $K(x)$ – функции Бесселя и Макдональда; ψ_r – неизвестное частное решение дифференциального уравнения, зависящее от вида внешней нагрузки; C_1, …, C_6 – константы интегрирования, следующие из условий на контуре и требований ограниченности решения в центре пластины.

Подстановка нагрузки (1) в выражение интегрального оператора дает

$$\int\mathrm{L}_3^{-1}(q)\,\mathrm{d}\,r=q_0\left[H(b-r)\left(\frac{r^4-5b^4}{64}-\frac{b^4}{16}\ln\left(\frac{r}{b}\right)-\frac{b^2r^2}{8}\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\frac{b^2r^2}{16}\right)-\right.$$

$$\left.-H(a-r)\left(\frac{r^4-5a^4}{64}-\frac{a^4}{16}\ln\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{a^2r^2}{8}\ln\left(\frac{r}{a}\right)+\frac{a^2r^2}{16}\right)\right].$$

В силу линейности системы уравнений (2) искомое частное решение можно получить в виде разности двух решений для подобной пластины при круговой нагрузке, полученных в [15]. При нагрузке (1) оно будет

$$\psi_r=\frac{\gamma_1q_0}{2\beta^2}H_0(b-r)\left[\frac{b^2}{r}-r+2b\left(K_1(\beta b)I_1(\beta r)-I_1(\beta b)K_1(\beta r)\right)\right]-$$

$$-\frac{\gamma_1q_0}{2\beta^2}H_0(a-r)\left[\frac{a^2}{r}-r+2a\left(K_1(\beta a)I_1(\beta r)-I_1(\beta a)K_1(\beta r)\right)\right]+\frac{C_1\gamma_1}{\beta^2r}, \tag{5}$$

где β, γ_1 – коэффициенты, выражаемые через a_i.

Интеграл от относительного сдвига ψ в выражении для прогиба (4) с учетом частного решения (5) получаем в виде

$$\int\psi\,\mathrm{d}\,r=\frac{C_2I_0(\beta r)}{\beta}-\frac{C_3K_0(\beta r)}{\beta}+\frac{C_1\gamma_1}{\beta^2}\ln(r)+\frac{\gamma_1q_0}{2\beta^2}\times$$

$$\times\left[H_0(b-r)\left(\frac{b^2-r^2}{2}+b^2\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\frac{2b}{\beta}\left(K_1(\beta b)I_0(\beta r)+I_1(\beta b)K_0(\beta r)\right)-\frac{2}{\beta^2}\right)-\right.$$

$$-H_0(a-r)\left(\frac{a^2-r^2}{2}+a^2\ln\left(\frac{r}{a}\right)+\frac{2a}{\beta}\big(K_1(\beta a)I_0(\beta r)+I_1(\beta a)K_0(\beta r)\big)-\frac{2}{\beta^2}\right)\Bigg].$$

Константы интегрирования получим из граничных условий (3) и решения (4)

$$C_1=-\frac{q_0(b^2-a^2)}{2},\quad C_2=\frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)}\left(\frac{b^2-a^2}{2}-bK_1(\beta)I_1(\beta b)+aK_1(\beta)I_1(\beta a)\right),$$

$$C_3=\frac{q_0\gamma_1}{\beta^2}\big(bI_1(\beta b)-aI_1(\beta a)\big),\ C_5=\frac{q_0}{8}\left(2b^2-b^4-2a^2+a^4\right),C_6=\frac{q_0}{16b_3}\left(b^4-a^4\right),$$

$$C_4=-\frac{a_5\gamma_1 q_0}{a_6\beta^4 I_1(\beta)}\left(\frac{I_0(\beta)\beta\left(b^2-a^2\right)}{2}-bI_1(\beta b)+aI_1(\beta a)\right)+\frac{q_0\left(b^4-a^4\right)}{32a_6}+\frac{q_0\left(b^2-a^2\right)}{16a_6}.$$

Подстановка констант интегрирования в решение (4) дает

$$\psi=\frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2}\left[\frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)}\left(\frac{b^2-a^2}{2}-bK_1(\beta)I_1(\beta b)+aK_1(\beta)I_1(\beta a)\right)+K_1(\beta r)\times\right.$$

$$\times\big(bI_1(\beta b)-aI_1(\beta a)\big)+\frac{H_0(b-r)}{2}\left(\frac{b^2}{r}-r+2b\big(K_1(\beta b)I_1(\beta r)-I_1(\beta b)K_1(\beta r)\big)\right)-$$

$$\left.-\frac{H_0(a-r)}{2}\left(\frac{a^2}{r}-r+2a\big(K_1(\beta a)I_1(\beta r)-I_1(\beta a)K_1(\beta r)\big)\right)-\frac{(b^2-a^2)}{2r}\right],$$

$$w=\frac{a_5}{a_6}\frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)}\left[\frac{I_0(\beta r)}{\beta I_1(\beta)}\left(\frac{b^2}{2}-bK_1(\beta)I_1(\beta b)\right)-\frac{b^2 I_0(\beta)\beta}{2\beta^2 I_1(\beta)}+\frac{bI_1(\beta b)}{\beta^2 I_1(\beta)}-\frac{bI_1(\beta b)K_0(\beta r)}{\beta}-\right.$$

$$\left.-\frac{b^2}{2}\ln(r)\frac{H_0(b-r)}{2}\left(\frac{b^2-r^2}{2}+b^2\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\frac{2b}{\beta}\big(K_1(\beta b)I_0(\beta r)+I_1(\beta b)K_0(\beta r)\big)-\frac{2}{\beta^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{q_0}{8a_6}\left[\left(\frac{r^4-5b^4}{8}-\frac{b^4}{2}\ln\left(\frac{r}{b}\right)-b^2r^2\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\frac{b^2r^2}{2}\right)H_0(b-r)+\right.$$

$$\left.+b^2r^2(\ln r-1)+\frac{b^2}{4}r^2\left(2-b^2\right)+\frac{b^4}{2}\ln r+\frac{b^4}{4a_6}+\frac{b^2}{2a_6}\right]. \qquad (6)$$

2 Численные результаты. Проведен расчет перемещений пятислойной пластины, несущие слои которой толщинами $h_1 = h_2 = h_4 = 0{,}02$ выполнены из дюралюминия Д16-Т, а заполнители, для которых $h_3 = h_5 = 0{,}1$, – из фторопласта. Упругие характеристики материалов приведены в [1]. Разность радиусов кольца силовой нагрузки $b - a = 0{,}25$. Ее значение $q_0 = 1$ МПа.

Рисунок 2 иллюстрирует перемещения в пластине при различных размерах силового кольца: *1* – $a = 0$; *2* – $a = 0{,}25$; 3 – $a = 0{,}5$; 4 – $a = 0{,}75$. Наибольший прогиб имеет место при $a = 0{,}25$, относительный сдвиг – при $a = 0{,}5$.

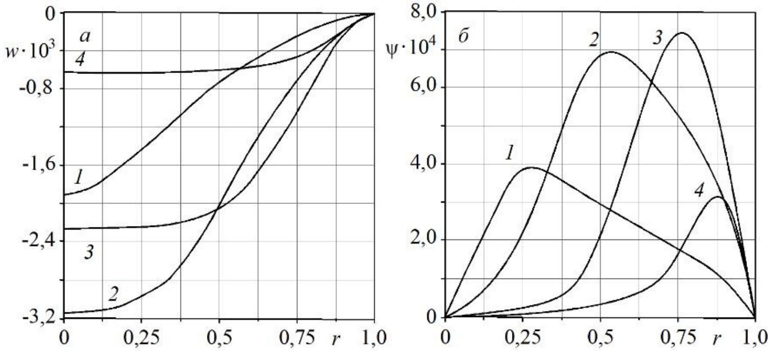

Рисунок 2 – Перемещения при различных внутренних радиусах a кольцевой нагрузки

На рисунке 3 показано изменение максимальных прогибов w в центре пластины и относительных сдвигов ψ при $r = 0{,}75$ в зависимости от внутреннего радиуса a кольца нагрузки при $b - a = 0{,}05$. Здесь экстремум прогиба достигается примерно при $a = 0{,}3$, относительного сдвига – при $a = 0{,}6$

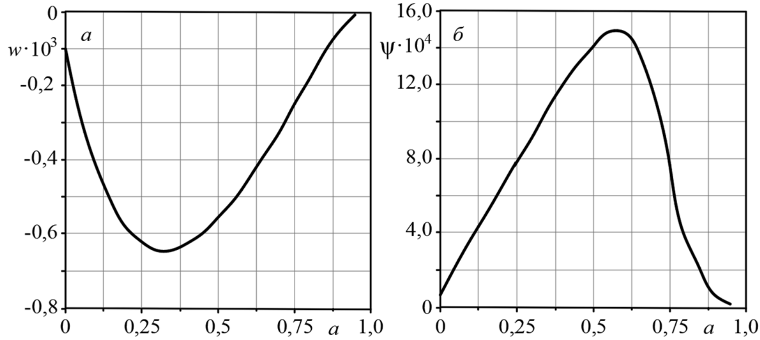

Рисунок 3 – Перемещения при различных внутренних радиусах a кольцевой нагрузки

Заключение. Предложенная математическая модель деформирования пятислойной симметричной по толщине упругой круглой пластины позволяет исследовать ее НДС при непрерывных и локальных кольцевых нагрузках.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Aghalovyan, L.** Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore–London : World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.

2 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

3 **Журавков, М. А.** Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021. – 535 с.

4 **Zhuravkov, M. A.** Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

5 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.

6 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

7 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

8 **Козел, А. Г.** Термосиловой изгиб упругой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2021. – Вып. 14. – С. 90–96.

9 **Нестерович, А. В.** Деформирование трехслойной круговой пластины при косинусоидальном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 1 (42). – С. 85–90.

10 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

11 **Лачугина, Е. А.** Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е. А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

12 **Салицкий, В. С.** Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В. С. Салицкий // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXVII Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. – 2021. – Т. 1. – С. 199–201.

13 **Салицкий, В. С.** Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15 – С. 209–213.

14 **Салицкий, В. С.** Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – Вып. 38 – С. 234–239.

15 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

V. S. SALICKY
Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

ROUND FIVE-LAYER PLATE UNDER AXIALLY SYMMETRIC CIRCULAR LOAD

A boundary value problem is formulated for a bending of a circular elastic five-layer plate, symmetric in thickness, with two fillers. The plate is subjected to uniformly distributed circular transverse load. Deformation of the outer and inner thin bearing layers obeys the Kirchhoff hypotheses. For relatively thick fillers, the Timoshenko hypothesis is satisfied. Equilibrium equations for the plate are obtained by the Lagrange variational method taking into account the work of the tangential stresses in the fillers. An exact solution to the boundary value problem is given and its numerical testing is performed.

Keywords: round five-layer plate, load distributed over a ring, exact solution.

Получено 30.10.2024