

УДК 691-419:534.13

Э. И. СТАРОВОЙТОВ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь***КОЛЕБАНИЯ СЭНДВИЧ-ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РЕЗОНАНСНОЙ НАГРУЗКИ**

Исследованы поперечные колебания круговой сэндвич-пластины с учетом температуры окружающей среды. Нагрузка резонансная, гармоническая, равномерно распределенная. Температурное поле в пластине однородное, стационарное. Пластина симметричная по толщине. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. Получено аналитическое решение задачи с помощью разложения искомых функций в ряд по системе собственных ортонормированных функций. Приведены результаты числового параметрического анализа прогиба от времени и температуры.

Ключевые слова: круговая трехслойная пластина, температура, резонансная нагрузка.

Введение. Слоистые конструктивные элементы широко применяются в транспортном машиностроении, аэрокосмическом комплексе и строительстве с середины прошлого века. Исследование их поведения при динамическом нагружении с учетом температуры окружающей среды в настоящее время является одной из наиболее актуальных задач. Созданию необходимых математических моделей посвящено значительное число публикаций.

В монографиях [1–3] разработаны расчетные модели статического и динамического деформирования слоистых конструкций при воздействии различных физико-механических полей. Предлагаются подходы к выбору кинематических гипотез, постановке и методике решения задач статики и динамики, отмечаются возникающие при температурных воздействиях особенности. В обзорной работе [4] изложены суть асимптотического метода решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и методика применения этого метода при решении статических и динамических краевых задач для тонкостенных тел (балки, пластины, оболочки). Рассмотрены как классические, так и неклассические краевые задачи, более общие результаты проиллюстрированы решениями конкретных задач. В монографии [5] выполнен анализ термических напряжений в композитных балках, пластинах и оболочках. Рассматриваются статические и динамические реакции для связанных и несвязанных термоупругих задач, термическая потеря устойчивости и эффекты явления флаттера панелей.

В статьях [6–9] рассмотрены свободные колебания и нестационарные нагружения тонкостенных элементов конструкций, включая цилиндрические оболочки. В работах [10, 11] предложена дискретно-слоистая модель внутреннего демпфирования колебаний многослойной пластины по Томпсону – Кельвину – Фойгту. Показано, что для тонких пластин размерность поставленной задачи может быть уменьшена с помощью упрощающих гипотез для каждого слоя.

В статьях [12, 13] анализируются характеристики динамических и квазистатических процессов в трехслойных пластинах, связанных с основанием Пастернака. Получены аналитические решения и проведен численный анализ перемещений в слоях пластины. В работах [14, 15] исследовано деформирование трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем и при осесимметричных нагрузках в своей плоскости. Воздействие температуры на деформацию композитного ступенчатого стержня и трехслойной пластины, нагруженной моментной нагрузкой, рассматривалось в работах [16, 17].

Здесь предложена постановка начально-краевой задачи о резонансных поперечных колебаниях трехслойной круговой пластины и получено аналитическое решение, учитывающее температуру окружающей среды.

1 Постановка начально-краевой задачи. Используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1). В симметричной по толщине трехслойной пластине для тонких несущих слоев толщиной $h_1 = h_2 = h$ принимаются гипотезы Кирхгофа. Заполнитель считается легким, не учитывается работа касательных напряжений, относительно толстым ($h_3 = 2c$). В нем справедлива гипотеза Тимошенко: нормаль к срединной поверхности остается прямой, несжимаемой и поворачивается на дополнительный угол $\psi(r, t)$. Внешняя поверхность находится под воздействием окружающей среды, благодаря которой изменяется температура пластины.

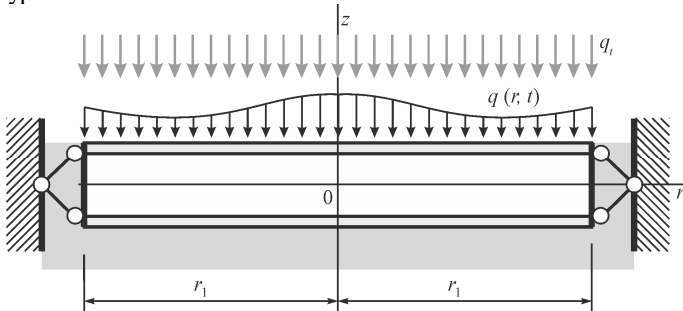


Рисунок 1 – Схема нагружения сэндвич-пластины

Напряжения и деформации связаны законом Гука с учетом температуры:

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma_k^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T) \quad (\alpha = r, \varphi);$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_k \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad (1)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}, s_{rz}^{(3)}, (\varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \varepsilon_{rz}^{(3)})$ – девиаторы тензоров напряжений (деформаций); $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – среднее напряжение (деформация); $G_k(T), K_k(T)$ – термозависимые модули сдвига и объемного деформирования, в несущих слоях, $G_1 = G_2 = G, K_1 = K_2 = K$; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материалов слоев.

Гармоническая силовая нагрузка равномерно распределена по внешней поверхности верхнего слоя:

$$q(r, t) = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (2)$$

где $q_0 = \text{const}$; ω_k – интенсивность и частота нагрузки, совпадающая с одной из частот основного тона пластины $\omega_k = \omega_n$; D, E – параметры нагрузки.

Общие уравнения колебаний рассматриваемой пластины без учета температурного поля приведены в [1]. В нашем случае остаются два уравнения, коэффициенты a_i будут зависеть от температуры через модули упругости, а в правой части второго уравнения появится резонансная нагрузка (2):

$$\begin{aligned} L_2(a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0; \\ L_3(a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \end{aligned} \quad (3)$$

где w, ψ – искомые прогиб и относительный сдвиг; $M_0 \ddot{w}$ – инерционные силы, причем $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_1^2$; ρ_k – плотность материала; точка над переменной обозначает производную по времени; дифференцирование по координате r обозначено запятой в нижнем индексе; a_i – коэффициенты,

$$\begin{aligned} a_4 &= c^2 \left(2hK^+ + \frac{2}{3} cK_3^+ \right); \quad a_5 = c \left[2h \left(c + \frac{1}{2} h \right) K^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_6 &= 2h \left(c^2 + ch + \frac{1}{3} h \right) K^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k; \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k; \end{aligned}$$

L_2, L_3 – дифференциальные операторы,

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Для описания зависимости упругих характеристик материалов слоев от температуры используется формула, предложенная Беллом [2]:

$$\begin{aligned} \{G(T), K(T)\} &= \{G(0), K(0)\} \varphi(T), \\ \varphi(T) &= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \frac{T}{T_m} \leq 0,06; \\ 1,03(1 - \frac{T}{2T_m}) & \text{при } 0,06 < \frac{T}{T_m} \leq 0,57, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

где T_m – температура плавления; $G(0) = G_0 / \varphi(T_0)$; $K(0) = K_0 / \varphi(T_0)$, G_0, K_0 – значения модулей при температуре T_0 .

На контуре пластины принимается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев $\psi(r_1, t) = 0$. Граничные условия:

– при заделке контура пластины

$$\psi(r_1, t) = w(r_1, t) = w_{,r}(r_1, t) = 0;$$

– при шарнирном опирании (см. рисунок 1)

$$\Psi(r_1, t) = w(r_1, t) = 0; \quad M_r(r_1, t) = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0, \quad (5)$$

где $\sigma_r^{(k)}$ – радиальные напряжения; M_r – радиальный изгибающий момент,

$$M_r = a_5 \Psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} \frac{w_{,r}}{r_1}, \quad a_{60} = 2hK^- \left(c^2 + ch + \frac{1}{3}h^2 \right) + \frac{2}{3}c^3 K_3^-.$$

В начальный момент времени прогиб и скорость отсутствуют:

$$w(r, 0) = 0; \quad \dot{w}(r, 0) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, перемещения рассматриваемой пластины должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений в частных производных (7), граничным условиям (5) и начальным условиям (6).

2 Решение начально-краевой задачи. Система (3) после преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{a_5}{a_4} w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}; \\ L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} &= q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$M^4 = \frac{a_4}{a_6 a_4 - a_5^2} M_0.$$

Относительный сдвиг Ψ ограничен в центре пластины, поэтому $C_4 = 0$. Подставив первое уравнение (7) в граничные условия (5), получаем

$$C_3 = -\frac{a_5}{a_4 r_1} w_{,r}(r_1, t).$$

Искомые функции и нагрузку разложим в ряд по системе собственных функций $v_n \equiv v_n(\beta_n r)$, полученной в [1]:

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t); \quad \Psi(r, t) = \frac{a_5}{a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_{,r} T_n(t); \quad q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad (8)$$

$$v_n(\beta_n r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_0(\beta_n r) \right],$$

где $T_n(t)$ – неизвестная функция времени; β_n – собственные числа; d_n – нормировочные коэффициенты; $J_0(\beta_n r)$, $I_0(\beta_n r)$ – функции Бесселя; $q_n(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки (2) в ряд по частотам ω_k ,

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^{r_1} q(r, t) v_n r dr = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t),$$

$$D_n = Df(\beta_n), \quad E_n = Ef(\beta_n);$$

$$f(\beta_n) = \frac{q_0 r_1}{M_0 d_n \beta_n} \left[J_1(\beta_n r_1) - \frac{J_0(\beta_n r_1)}{I_0(\beta_n r_1)} I_1(\beta_n r_1) \right].$$

Дифференциальное уравнение для определения искомой функции времени $T_n(t)$ получается из второго уравнения системы (7) после подстановки выражений (8) с учетом коэффициентов $q_n(t)$:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = D_n \cos(\omega_k t) + E_n \sin(\omega_k t), \quad (9)$$

где ω_n – частоты собственных колебаний, причем $\omega_n^2 = \beta_n^4 / M^4$.

Решение уравнения (9) можно принять в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + y_n(t), \quad (10)$$

где $y_n(t)$ – частное решение, зависящее от частоты резонансной нагрузки ω_k ,

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \sin(\omega_k t) + \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \cos(\omega_k t) & \text{при } n \neq k, \\ \frac{D_k}{2\omega_k} t \sin(\omega_k t) - \frac{E_k}{2\omega_k} t \cos(\omega_k t) & \text{при } n = k. \end{cases}$$

Константы интегрирования в (10) получим из начальных условий (6):

$$A_n = - \begin{cases} \frac{D_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k, \\ 0, & n = k, \end{cases} \quad B_n = - \frac{1}{\omega_n} \begin{cases} \frac{\omega_k E_n}{\omega_n^2 - \omega_k^2}, & n \neq k \\ -\frac{E_k}{2\omega_k}, & n = k \end{cases}. \quad (11)$$

Таким образом, резонансные колебания сэндвич-пластины при учете окружающей температуры описываются формулами (8)–(11).

3 Численная апробация решения. Рассмотрим сэндвич-пластину единичного радиуса, шарнирно опертую по контуру. Слои выполнены из материалов Д16-Т – фторопласт-4 – Д16-Т с толщинами $h_1 = h_2 = 0,01$, $h_3 = 0,05$. Для вычисления собственных частот ω_n использовались приведенные в [1] собственные числа. Их зависимость от температуры учтена через упругие модули материалов слоев (4). Амплитуда интенсивности равномерно распределенной нагрузки $q_0 = 50$ Па, $D = E = 1$. Кривые соответствуют температурам: 1 – $T = 20$ °С; 2 – $T = 220$ °С.

Рисунок 2 иллюстрирует рост амплитуды колебаний при частоте резонансной нагрузки ω_k , совпадающей с частотой основного тона: $\omega_k = \omega_0$ (рисунок 2, а), $\omega_k = \omega_1$ (рисунок 2, б). Процесс графически неразличим и представлен, по сути, огибающими. При увеличении собственной частоты наблюдается падение скорости роста амплитуды колебаний за принятый интервал времени. Например, максимальный прогиб при частоте ω_0 больше соответствующего прогиба при частоте ω_1 примерно в 15 раз. Нагревание пластины приводит к росту прогиба на 11 %.

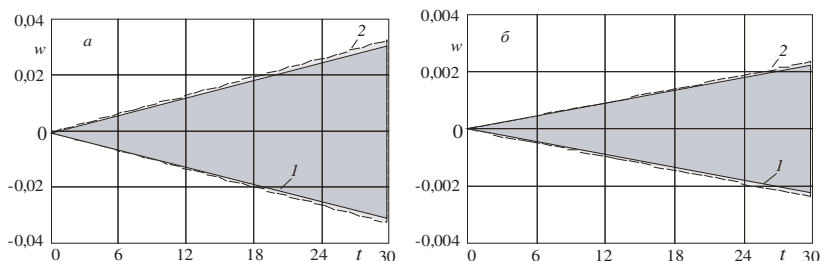


Рисунок 2 – Нарастание амплитуды прогиба во времени

На рисунке 3 для более наглядного эффекта влияния температуры принят интервал, в 100 раз меньший. Увеличение амплитуды, связанное с учетом температуры составляет 30 %.

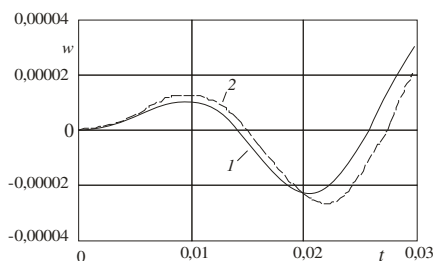


Рисунок 3 – Воздействие температуры на прогиб при резонансе по частоте ω_0

Выводы. Предложенная математическая модель термосилового резонансного воздействия на трехслойную упругую круговую пластину позволяет учитывать влияние температуры окружающей среды на параметры колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Журавков, М. А. Математические модели механики твердого тела // М. А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2021 – 535 с.
- 3 Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.
- 4 Reddy, J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis / J. N. Reddy. – 2nd ed. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.
- 5 Carrera, E. Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications / E. Carrera, F. A. Fazzolari, M. Cinefra. – Academic Press, 2016. – 440 p.
- 6 Mikhasev, G. I. Free vibrations of elastic laminated beams, plates and cylindrical shells / G. I. Mikhasev, H. Altenbach // Thin-walled laminated structures (Advanced Structured Materials. Vol. 106). – Cham : Springer, 2019. – P. 157–198.

7 **Leonenko, D. V.** Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // *International Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 52, no. 4. – P. 359–367.

8 **Fedotenkov, G. V.** Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G. V. Fedotenkov, D. V. Tarlakovsky, Y. A. Vahterova // *Lobachevskii journal of mathematics*. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447.

9 **Tarlakovskii, D. V.** Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D. V. Tarlakovsky, G. V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

10 **Paimushin, V. N.** Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate. Mechanics of Composite Materials / V. N. Paimushin, R. K. Gazizullin. – 2017. – Vol. 53, no. 3. – P. 407–436.

11 **Paimushin, V. N.** Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping. Mechanics of Composite Materials / V. N. Paimushin, V. A. Firsov, V. M. Shishkin. – 2017. – Vol. 53, no. 4. – P. 609–630.

12 **Леоненко, Д. В.** Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2014. – № 1. – С. 59–63.

13 **Козел, А. Г.** Уравнения равновесия упругопластической круговой пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации*. – 2018. – Вып. 11. – С. 127–133.

14 **Захарчук, Ю. В.** Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем / Ю. В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – Вып. 10. – С. 55–66.

15 **Нестерович, А. В.** Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А. В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Вып. 12. – С. 152–157.

16 Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э. И. Старовойтов [и др.] // *Инженерно-физический журнал*. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.

17 **Старовойтов, Э. И.** Изгиб трехслойной пластины в температурном поле моментной нагрузкой / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, А. Абдусаттаров // *Механика. Исследования и инновации*. – 2023. – Вып. 16. – С. 189–195.

E. I. STAROVOITOV

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

OSCILLATIONS OF A SANDWICH PLATE IN A TEMPERATURE FIELD UNDER A RESONANT LOAD

The transverse vibrations of a circular sandwich plate are investigated taking into account the ambient temperature. The load is resonant, harmonic, uniformly distributed. The temperature field in the plate is homogeneous, stationary. The plate is symmetrical in thickness. The load-bearing layers are assumed to be thin and highly durable. An analytical solution to the problem is obtained by expanding the sought-for functions in a series according to a system of eigen orthonormal functions. The results of a numerical parametric analysis of deflection versus time and temperature are presented.

Keywords: circular three-layer plate, temperature, resonant load.

Получено 15.08.2024