

УДК 691-419:534.1

Д. А. БУДНИКОВА

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ

Рассматривается задача о собственных колебаниях симметричного по толщине пятислойного стержня. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. В соответствии с гипотезой Бернулли после приложения нагрузки их поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными деформированной осевой линии. Для относительно толстых легких заполнителей выполняется гипотеза Тимошенко. Дифференциальные уравнения колебаний получены с использованием вариационного принципа Даламбера – Лагранжа. Выполнен численный анализ полученного решения системы дифференциальных уравнений движения.

Ключевые слова: стержень осесимметричный пятислойный, два слоя заполнителя, собственные колебания.

Введение. Слоистые конструкции широко используются на практике благодаря тому, что они позволяют выдерживать достаточно высокие нагрузки при незначительной массе. В настоящее время разрабатываются такие слоистые элементы, которые помимо обеспечения необходимой жесткости позволяют обеспечить выполнение иных функций, например, защиту от шума и вибраций. Поэтому имеется значительное число публикаций, посвященных исследованиям статике и динамики таких элементов.

Подходы к разработке методик постановки и решения краевых задач для тонкостенных элементов конструкций, учитывающие воздействие внешней среды, предложены в монографиях [1–4]. Кинематические гипотезы, как правило, учитывают относительный сдвиг и работу касательных напряжений в заполнителе, высокую жесткость при незначительной толщине несущих слоев.

В статье [5] исследуется деформирование трехслойной круговой пластины со сжимаемым заполнителем, причем сжимаемость описывает функция, линейная по толщине слоя. В работе [6] рассмотрен изгиб сэндвич-пластины, связанной с основанием Пастернака, модель которого учитывает сдвиговые свойства материала основания. В публикации [7] исследуется влияние температуры на напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня с жестким заполнителем. Деформации изгиба симметричных по толщине круговых пятислойных пластин с двумя заполнителями, находящихся под действием статических нагрузок, анализируются в статьях [8, 9].

Работы [10–13] посвящены исследованию динамического поведения трехслойных и пятислойных пластин. Геометрические гипотезы соответствуют ломаной линии, заполнители приняты легкими, т. е. для них не учитывается

работа касательных напряжений. Аналитические решения, описывающие собственные и вынужденные колебания, представлены в виде разложения искомых перемещений в ряд по системам собственных функций. Динамическое нагружение пятислойных стержней ранее не рассматривалось.

Целью представленной работы стало определение условий, при которых существуют частоты собственных колебаний симметричного по толщине пятислойного стержня.

Постановка задачи. Рассматривается стержень, включающий три несущих слоя и два слоя заполнителя (рисунок 1). Для тонких несущих слоев 1, 2, 4 справедливы гипотезы Бернулли, в соответствии с которыми поперечные сечения при действии нагрузки остаются плоскими и перпендикулярными деформированной осевой линии. Заполнители 3, 5 приняты сравнительно толстыми. Для них выполняется гипотеза Тимошенко, в соответствии с которой после приложения нагрузки поперечные сечения остаются плоскими, несжимаемыми по толщине, но поворачиваются на дополнительный угол $\psi(x, t)$. Декартова система координат связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. При выводе дифференциальных уравнений рассмотрим общий случай колебаний, при котором поверхностная нагрузка $q(x, t)$ распределена по верхней плоскости стержня. Искомыми функциями являются прогиб стержня $w(x, t)$ и относительный сдвиг $\psi(x, t)$.

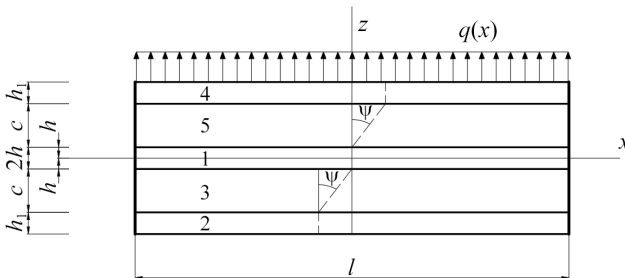


Рисунок 1 – Нумерация слоев и геометрия пятислойного стержня

Исходя из принятых гипотез продольные перемещения $u_x^{(k)}$ ($k = 1, \dots, 5$ – номер слоя) связаны с искомыми функциями $w(x, t)$, $\psi(x, t)$ соотношениями

$$\begin{aligned}
 u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi, & (c + h \leq z \leq c + h + h_1); \\
 u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi, & (h \leq z \leq c + h); \\
 u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, & (-h \leq z \leq h); \\
 u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi, & (-h - c \leq z \leq -h); \\
 u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, & (-h - h_1 - c \leq z \leq -h - c),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; $c\psi$ – смещения внешних несущих слоев вследствие сдвига в заполнителях; запятая в нижнем индексе соответствует производной по координате x .

Формулы для продольных деформаций получаются из соотношений Коши [1] с учетом геометрии слоев стержня (1):

$$\begin{aligned}\epsilon_x^{(4)} &= -zw_{,xx} + c\psi_{,x}; & \epsilon_{xz}^{(4)} &= 0; & \epsilon_x^{(5)} &= -zw_{,xx} + (z-h)\psi_{,x}; & \epsilon_{xz}^{(5)} &= \frac{\psi}{2}; \\ \epsilon_x^{(1)} &= -zw_{,xx}; & \epsilon_{xz}^{(1)} &= 0; & \epsilon_x^{(3)} &= -zw_{,xx} + (z+h)\psi_{,x}; & \epsilon_{xz}^{(3)} &= \frac{\psi}{2}; \\ \epsilon_x^{(2)} &= -zw_{,xx} - c\psi_{,x}; & \epsilon_{xz}^{(2)} &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

В свою очередь, напряжения в слоях определяются с помощью закона Гука:

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k \epsilon_{xx}^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \epsilon^{(k)}; \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \epsilon_{xz}^{(3)}; \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \epsilon_{xz}^{(5)}, \quad (3)$$

где $s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \sigma^{(k)} \delta_{ij}$, $\epsilon_{ij}^{(k)} = \epsilon_{ij}^{(k)} - \epsilon^{(k)} \delta_{ij}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)} = \frac{1}{3} \sigma_{xx}^{(k)}$, $\epsilon^{(k)} = \frac{1}{3} \epsilon_{xx}^{(k)}$ – шаровые части соответствующих тензоров; δ_{ij} – символы Кронекера; G_k, K_k – модули упругости материалов слоев (сдвига и объемного деформирования).

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающей поперечные колебания рассматриваемого стержня, используем вариационный принцип Даламбера – Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (4)$$

где δA – виртуальная работа внешней нагрузки, включая силы инерции; δW – вариация работы внутренних усилий:

$$\delta A = \iint_S (q \delta w - M_0 \ddot{w}) dS = \int_0^l (b_0 q \delta w - M_0 \ddot{w}) dx; \quad \delta W = \iint_S \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \epsilon_x^{(k)} dz dS. \quad (5)$$

$M_0 \ddot{w}$ – силы инерции в поперечном направлении, точки сверху обозначают производную по времени, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) b_0 l$, ρ_k – плотность материала, b_0 – ширина поперечного сечения; δ – оператор вариации.

Заметим, что работа касательных напряжений в легком заполнителе в (5) не учитывается, в связи с их малостью.

Подставим работы (5) в уравнение (4) с учетом виртуальных деформаций, следующих из (2). Выполнение уравнения (4) возможно только при равенстве нулю коэффициентов при вариациях искомых функций. Из этого условия получаем уравнения движения:

$$\begin{aligned}H_{,x} &= 0; \\ M_{,xx} - M_0 \ddot{w} &= -b_0 q.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь H_x, M_{xx} – обобщенные внутренние силы и моменты:

$$M_x = \sum_{k=1}^5 M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz; \quad N_x = \sum_{k=1}^5 N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz;$$

$$H = (M_x^{(3)} + M_x^{(5)}) + c(N_x^{(4)} - N_x^{(2)}) + h(N_x^{(3)} - N_x^{(5)}).$$

Чтобы получить уравнения колебаний в искомах функциях, выразим обобщенные внутренние усилия через $w(x, t)$, $\psi(x, t)$, используя закон Гука (3):

$$M_x = - \left[\frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right] w_{,xx} -$$

$$- \left[K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) + \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (3h + 2c) \right] \psi_{,x};$$

$$H = \left[-\frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right] w_{,xx} + \left[c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right] \psi_{,x}. \quad (7)$$

Подставив выражения (7) в уравнения (6), получим искомые уравнения движения в перемещениях:

$$a_1 \psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} = 0,$$

$$a_2 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} - M_0 \ddot{w} = -q, \quad (8)$$

где $a_1 = \left[c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right]$, $a_2 = \left[\frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right]$,

$$a_4 = \left[\frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3h^2 + 3c^2 + 3h_1 h + 3h_1 c + 6ch) \right],$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+.$$

В начальный момент времени прогиб стержня и его производная по времени считаются заданными. В качестве граничных условий принимаем, что торцы стержня жестко заделаны, то есть

$$\text{при } x = \pm \frac{l}{2} \quad \psi(x, t) = w(x, t) = w_{,x}(x, t) = 0. \quad (9)$$

Собственные колебания стержня. Для рассмотрения свободных колебаний положим в (8) $q = 0$. Отсюда получим

$$\psi = \frac{a_2}{a_1} w_{,x} + C_1 x + C_2;$$

$$w_{,xxxx} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \ddot{w} = 0. \quad (10)$$

Прогиб стержня принимаем в виде произведения неизвестной координатной функции и гармонической функции времени:

$$w = v(x)[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (11)$$

где A, B – постоянные интегрирования; ω – частота собственных колебаний.

Соответственно ускорение

$$\ddot{w} = -v(x)\omega^2[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение для определения координатной функции $v(x)$ получим, подставив (11), (12) во второе уравнение системы (10) и приравняв коэффициенты перед функциями времени:

$$v_{,xxxx} - \beta^4 v = 0, \quad (13)$$

$$\text{где} \quad \beta^4 = \frac{a_1 M_0 \omega^2}{a_4 a_1 - a_2^2}. \quad (14)$$

Вид решения уравнения (13) определяется знаком параметра β^4 , поэтому далее исследуем его при различных материалах и толщинах слоев.

Численные результаты. В числителе формулы (14) положительное значение, поэтому знак β^4 определяется знаком функции $f = a_4 a_1 - a_2^2$. Исследуем ее зависимость от материалов и толщин слоев рассматриваемого пяти-слойного стержня. При расчетах приняты следующие упругие характеристики материалов слоев: Д16Т – $K = 92,14$ ГПа, $G = 26,71$ ГПа, титановый сплав – $K = 104$ ГПа, $G = 41$ ГПа, фторопласт – $K = 4700$ МПа, $G = 90$ МПа. Приведенные далее результаты вычислений соответствуют значениям толщин слоев $c = 0,2l$ (рисунки 2 и 3) и $h = h_1 = 0,02l$ (рисунки 3 и 4).

На рисунках 2 и 3 приведены кривые, описывающие функцию f в зависимости от толщин h_1 внешних и h – срединного несущих слоев для стержней с заполнителями из фторопласта-4. Линия 1 соответствует несущим слоям из дюралюминия Д16Т, линия 2 – из титана. Расчеты показали, что значения исследуемой функции оказались положительными на всём интервале изменения аргументов. При замене материала несущих слоев с дюралюминия на титановый сплав кривые на рисунках 2, 3 смещаются вверх.

Рисунки 4, 5 отражают зависимость исследуемой функции от материалов заполнителя c : 1 – фторопласт; 2 – пенопласт; 3 – пенополиуретан и несущих слоев из дюралюминия – и титанового сплава. Кривые 2, 3 практически совпадают, при этом кривая 2 расположена несколько выше. Для всех материалов $f(c) > 0$, причем в вырожденном случае при отсутствии заполнителей $f(0) = 0$, однако этот случай уже не относится к исследуемой пятислойной конструкции, так как соответствует однородному стержню.

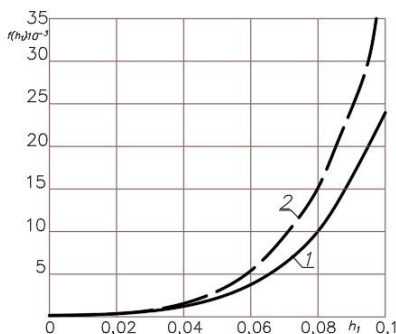


Рисунок 2 – Зависимость $f(h_1)$ при различных материалах внешних несущих слоев ($h = 0,02l$)

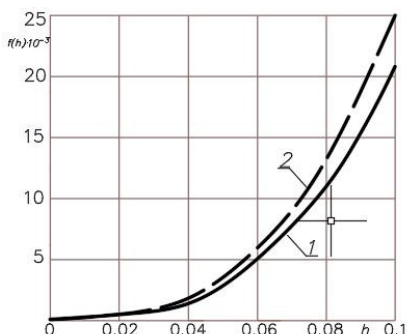


Рисунок 3 – Зависимость $f(h)$ при различных материалах внешних несущих слоев ($h_1 = 0,02l$)

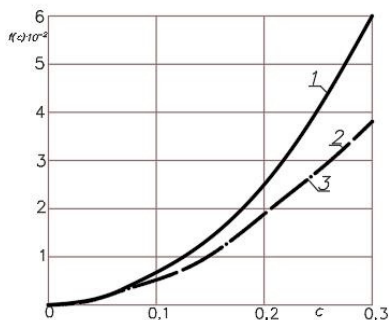


Рисунок 4 – Зависимость f от c при различных материалах заполнителя (несущие слои из дюралюминия)

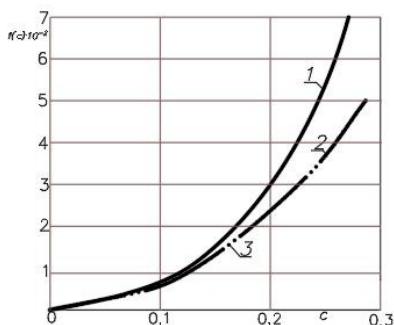


Рисунок 5 – Зависимость f от c при различных материалах заполнителя (несущие слои из титана)

Выводы. В работе получены уравнения движения пятислойного симметричного по толщине стержня и определены условия, при которых происходят его свободные колебания. Выполнен численный анализ для конкретного набора исходных данных, который продемонстрировал, что колебания возможны при всех рассмотренных значениях геометрических размеров и характеристик материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горшков, А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 2 Zhuravkov, M. A. Mechanics of solid deformable body / M. A. Zhuravkov, Y. Lyu, E. I. Starovoitov. – Singapore : Springer, 2022. – 317 p.

3 **Абдусаттаров, А.** Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э. И. Старовойтов, Н. Б. Рузиева. – Ташкент : Ideal Press, 2023. – 381 с.

4 Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э. И. Старовойтов [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

5 **Захарчук, Ю. В.** Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 66–75.

6 **Козел, А. Г.** Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А. Г. Козел // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2018. – Т. 332, № 6. – С. 25–34.

7 **Старовойтов, Э. И.** Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.

8 **Салицкий, В. С.** Изгиб круговой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – Вып. 38. – С. 234–239.

9 **Салицкий, В. С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

10 **Tarlakovskii, D. V.** Two-Dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D. V. Tarlakovskii, G. V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145–152.

11 **Leonenko, D. V.** Vibrations of cylindrical sandwich shells with elastic core under local loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, no. 4. – P. 359–367.

12 **Лачугина, Е. А.** Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

13 **Лачугина, Е. А.** Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е. А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

D. A. BUDNIKOVA

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

ANALYSIS OF A FIVE-LAYER ROD NATURAL OSCILLATIONS

The problem of natural oscillations of a symmetrical in thickness five-layer rod is considered. The load-bearing layers are assumed to be thin and highly durable. According to the Bernoulli hypothesis, after applying the load, their cross-sections remain flat and perpendicular to the deformed axial line. For the relatively thick lightweight fillers, the Timoshenko hypothesis is satisfied. Differential equations of oscillations are obtained using the d'Alembert-Lagrange variational principle. A numerical analysis of the obtained solution of the motion differential equations system is performed.

Keywords: axisymmetric five-layer rod, two fillers, natural oscillations.

Получено 07.11.2024