

УДК 691-419:539.371

А. Г. КОЗЕЛ

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***ИЗГИБ ТРЁХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ  
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ОТВЕРСТИЯ**

Решена задача об осесимметричном изгибе круговой трёхслойной пластины с центральным отверстием. Реакция основания определяется двумя коэффициентами постели. Аналитическое решение получено в функциях Бесселя и Ханкеля. Рассмотрен случай равномерного распределения нагрузок. Определены константы интегрирования, соответствующие жесткому закреплению контуров пластины. Численно исследовано влияние на перемещения пластины радиуса отверстия и характеристик основания.

**Ключевые слова:** круговая трехслойная пластина, упругость, пластина с отверстием, осесимметричный изгиб, модель Пастернака.

**Введение.** В последние годы широкое распространение во многих отраслях промышленности получили композиты. В зависимости от требований, которые ставятся перед разработчиком, структура композита может представлять ряд слоев. Объективно считается, что такой композит обладает высокой изгибной прочностью, но это не единственное его преимущество. В слоистых композитах отдельные материалы объединяются в единую целую конструкцию, наделяя её уникальным сочетанием механических, химических, теплофизических и других свойств. В силу принципиального различия используемых материалов слоев и многообразия выполненных из них форм изделий разработка единой теории расчета довольно затруднительна. Поэтому, несмотря на многочисленные научные исследования в этой области, остается актуальной разработка эффективных методов расчёта соответствующих систем.

Основы механики слоистых элементов конструкций представлены в [1, 2]. Ряд механико-математических моделей слоистых пластин, стержней и оболочек, в том числе связанных с упругим однопараметрическим основанием, разработан в монографиях [3, 4]. При расчете конструкций сплошное упругое основание заменяется гипотетическим основанием (моделью основания). Различные задачи статики трёхслойных сплошных и кольцевых пластин решены в статьях [5–7]. В работе [8] приведены различия в постановках и решениях задач об изгибе круговой трёхслойной пластины, связанной с упругим основанием, в случаях применения моделей с одним параметром (коэффициентом постели) (далее – модель Винклера) и двумя коэффициентами постели [9] (далее – модель Пастернака). Согласно последней первый коэффициент постели  $k_1$  (коэффициент сжатия) формально совпадает с аналогичным коэффициентом модели Винклера, а второй –  $k_2$  (коэффициент сдвига) дает возможность учета касательных напряжений в основании, что позволяет принимать во внимание

осадку и за пределами конструкции. Таким образом, предпочтительнее использовать модель Пастернака, а модель Винклера является её частным случаем, если положить второй коэффициент постели равным нулю.

Осесимметричные колебания и потеря устойчивости сэндвич-пластин, связанных с основанием модели Пастернака, исследованы в статьях [10, 11]. Параметры, влияющие на существование «обратной» изгибной волны в пластине на упругом основании, определены в работе [12]. В статье [13] представлен нелинейный электромеханический анализ произвольной круглой пластины на двухпараметрическом основании, внешние слои которой выполнены из функционально-градиентного материала.

В ранее выполненных автором исследованиях [14–16] рассмотрено статическое деформирование сплошных круговых трёхслойных пластин на двухпараметрическом упругом основании, в том числе под действием термосиловых нагрузок. Однако при проектировании конструкций, эксплуатируемых в реальных условиях, часто необходимо учитывать наличие технологических и функциональных отверстий. Поэтому разработка методики определения напряжённо-деформированного состояния упругой круговой трёхслойной пластины с центральным отверстием, связанной с двухпараметрическим основанием, является актуальной.

**Постановка краевой задачи в перемещениях.** Рассмотрим задачу об изгибе связанной с упругим основанием круговой трёхслойной пластины радиусом  $R_1$  с центральным осесимметричным отверстием радиусом  $R_0$ , (рисунок 1). Решение строится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , в которой за координатную принята срединная плоскость третьего слоя пластины ( $r, \varphi$ ), ось  $z$  направлена перпендикулярно ей вверх.

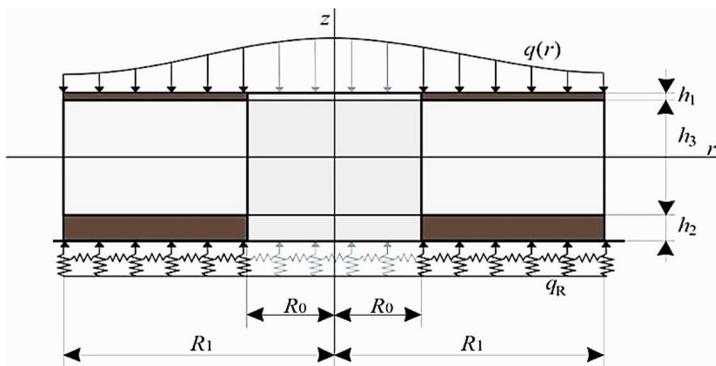


Рисунок 1 – Трёхслойная круговая пластина с отверстием

Рассматриваемая пластина включает два тонких несущих слоя ( $h_1, h_2$  – толщины верхнего и нижнего соответственно) и расположенного между ними лёгкого относительно толстого заполнителя ( $h_3 = 2c$ , где  $c$  – расстояние от сре-

динного слоя заполнителя до плоскости склейки слоев). Характеристики упругости материалов:  $G_k$  – модуль сдвига;  $K_k$  – объёмный модуль упругости,  $k = 1, 2, 3$  – номер слоя.

В рамках принятой модели описание напряженно-деформированного состояния пластины осуществляется с использованием следующих допущений: для несущих слоёв справедлива гипотеза Кирхгофа, для заполнителя – сдвиговая теория Тимошенко, считается пренебрежимо малой работа касательных напряжений  $\sigma_{rz}^{(3)}$ . Кроме того, задача рассматривается при условии непрерывности перемещений, то есть на границе слоёв не допускается проскальзывание и не происходит расслоение. Полагается, что для обеспечения отсутствия относительного сдвига слоёв ( $\psi = 0$ ) на внутреннем и внешнем контурах пластины располагаются жёсткие диафрагмы. Принимается, что слои пластины не надавливают друг на друга, поэтому напряжения  $\sigma_z = 0$ , а перемещения точек пластины в направлении оси  $z$  равны прогибу срединной плоскости заполнителя  $w$ . Деформации считаются малыми.

Поперечная нагрузка на пластину принята осесимметричной, поэтому в слоях отсутствуют тангенциальные перемещения ( $u_\varphi^{(k)} = 0$ ), а прогиб срединной плоскости  $w = w(r)$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi = \psi(r)$  и радиальное перемещение координатной плоскости  $u = u(r)$  не зависят от координаты  $\varphi$ .

Реакция основания, действующая на подошву пластины,

$$q_R(r) = k_1 w(r) - k_2 \left( w_{,rr}(r) + \frac{1}{r} w_{,r}(r) \right). \quad (1)$$

Здесь и далее запятая в нижнем индексе соответствует операции дифференцирования по следующей за ней координате.

Согласно гипотезе о прямолинейности нормали сдвиговые деформации в заполнителе определяются соотношением

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2} \psi = \frac{1}{2} (u_{r,z}^{(3)} + w_{,r}). \quad (2)$$

Выражения для определения радиальных перемещений  $u_r^{(k)}$  точек в слоях получаются интегрированием по толщине всего пакета соотношения (2):

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c); \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u \pm c\psi$  – значения смещения несущих слоёв 1 и 2 вследствие деформации срединного слоя 3;  $z$  – расстояние от координатной плоскости до рассматриваемой точки.

Тогда, учитывая соотношения Коши и формулы (3), компоненты тензора деформаций для каждого из слоёв принимают вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\Psi_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\Psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0; \\
\varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\Psi_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\Psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\Psi; \\
\varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\Psi_{,r} - zw_{,rr}; & \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\Psi - zw_{,r}); & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Обобщенные внутренние силы и моменты выразим через компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ):

$$\begin{aligned}
T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; & M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz; \\
H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}),
\end{aligned} \tag{5}$$

где  $T_r$  и  $T_\varphi$  – радиальная и окружная силы;  $M_r$  и  $M_\varphi$  – изгибающие моменты;  $H_r$  и  $H_\varphi$  – дополнительные моменты, возникающие вследствие сдвига в заполнителе (моменты сдвига).

Согласно принципу Лагранжа, если система находится в равновесии, то работа внутренних сил при любом возможном перемещении (вариации) должна быть равна работе внешних сил, приложенных к системе,

$$\delta W = \delta A_1 + \delta A_2, \tag{6}$$

где  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \iint_{r \varphi} [r(T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \Psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr}) + T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta \Psi - M_\varphi \delta w_{,r}] d\varphi dr,$$

двойной интеграл берётся по всей срединной поверхности заполнителя  $S$  ( $dS = r dr d\varphi$ );  $\delta A_1$  – вариация работы внешних нагрузок, с учётом (1),

$$\delta A_1 = \iint_S \left[ q - k_1 w + k_2 \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) \right] \delta w d r d \varphi;$$

$\delta A_2$  – вариация работы контурных усилий

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} \left( T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \Psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w \right) d\varphi.$$

Здесь учитывается, что к контуру пластины приложены внешние погонные силы  $T_r^0$ ,  $Q^0$  и моменты  $H_r^0$ ,  $M_r^0$ .

Вариации перемещений  $\delta u_r^{(k)}$  и вариации деформаций в слоях  $\delta \varepsilon_r^{(k)}$ ,  $\delta \varepsilon_\varphi^{(k)}$ ,  $\delta \varepsilon_{rz}^{(k)}$  следуют из (3) и (4) соответственно.

Выражение (6) возможно при любых значениях варьируемых величин только в случае равенства нулю коэффициентов при независимых вариациях

искомых функций. Таким образом, в результате преобразований имеем систему уравнений равновесия в усилиях:

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0;$$

$$H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0;$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) - k_1 w + k_2 \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) = -q. \quad (7)$$

Силовые граничные условия на контурах пластины ( $r = R_1$  и  $r = R_0$ ):

$$T_r = T_r^0; H_r = H_r^0; M_r = M_r^0; M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \quad (8)$$

Связь между напряжениями и деформациями в слоях пластины согласно линейной теории упругости:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \vartheta_\alpha^{(k)}; \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}; s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad (9)$$

где  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – шаровые составляющие тензоров напряжений и деформаций;  $s_\alpha^{(k)}$ ,  $\vartheta_\alpha^{(k)}$  – девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций;  $s_{rz}^{(3)}$ ,  $\vartheta_{rz}^{(3)}$  – касательное напряжение и угловая деформация в заполнителе.

Используя соотношения (9), подставим в систему уравнений (7) формулы для внутренних сил и моментов (5), выразив их через искомые функции, получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 \left( u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{1}{r^2} u \right) + a_2 \left( \Psi_{,rr} + \frac{1}{r} \Psi_{,r} - \frac{1}{r^2} \Psi \right) - a_3 \left( w_{,rrr} + \frac{1}{r} w_{,rr} - \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) &= 0; \\ a_2 \left( u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{1}{r^2} u \right) + a_4 \left( \Psi_{,rr} + \frac{1}{r} \Psi_{,r} - \frac{1}{r^2} \Psi \right) - a_5 \left( w_{,rrr} + \frac{1}{r} w_{,rr} - \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) &= 0; \\ a_3 \left( u_{,rrr} + \frac{2}{r} u_{,rr} - \frac{1}{r^2} u_{,r} + \frac{1}{r^3} u \right) + a_5 \left( \Psi_{,rrr} + \frac{2}{r} \Psi_{,rr} - \frac{1}{r^2} \Psi_{,r} + \frac{1}{r^3} \Psi \right) - \\ - a_6 \left( w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} \right) - k_1 w + k_2 \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) &= -q, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\text{где } a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k \left( K_k + \frac{4}{3} G_k \right), \quad a_2 = c \left[ h_1 \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) - h_2 \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) \right];$$

$$a_3 = h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right);$$

$$a_4 = c^2 \left( h_1 \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) + h_2 \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) + \frac{2}{3} c \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \right);$$

$$a_5 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) + \frac{2}{3} c^2 \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right) \right];$$

$$a_6 = h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) \left( K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) +$$

$$+ h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) \left( K_2 + \frac{4}{3} G_2 \right) + \frac{2}{3} c^3 \left( K_3 + \frac{4}{3} G_3 \right).$$

Предполагается, что внутренний и внешний контуры пластины зафиксированы таким образом, что они не могут двигаться или деформироваться под действием нагрузок, т. е. жестко закреплены. При таких условиях отсутствуют любые перемещения или повороты в этих точках, поэтому система уравнений (10) дополняется следующими граничными условиями:

$$u(R_0) = u(R_1) = 0; \quad \psi(R_0) = \psi(R_1) = 0;$$

$$w(R_0) = w(R_1) = 0; \quad w_{,r}(R_0) = w_{,r}(R_1) = 0. \quad (11)$$

В зависимости от конкретных условий задачи и типа нагрузки на контурах пластины могут встречаться другие граничные условия и их комбинации. Система дифференциальных уравнений равновесия (10) и граничные условия (11) являются постановкой в перемещениях краевой задачи об изгибе трехслойной пластины с отверстием, связанной с основанием Пастернака. Полученная постановка краевой задачи позволяет учитывать наличие технологических и функциональных отверстий при исследовании напряженно-деформированного состояния круговых трёхслойных пластин на упругом основании.

**Общее решение краевой задачи.** Методика решения системы, аналогичной системе дифференциальных уравнений (10), подробно расписана в [14]. Пользуясь ей, в результате преобразований приходим к системе уравнений

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r};$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r};$$

$$\Delta \Delta w - k_2 D \Delta w + k_1 D w = q D. \quad (12)$$

$$\text{Здесь коэффициенты } b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2};$$

$$D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2};$$

$C_1 - C_4$  – константы интегрирования;  $\Delta$  – оператор Лапласа в полярной системе координат.

Третье уравнение системы (12) согласно [14] имеет вид

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r) + w_p(r), \quad (13)$$

где  $C_5$ – $C_8$  – постоянные интегрирования;  $J_0(\sqrt{a} \kappa r)$ ,  $J_0(\sqrt{a} \kappa r)$  – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка;  $H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r)$ ,  $H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r)$  – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка;  $\kappa = \sqrt[4]{k_1 D}$ ,  $a$  и  $\bar{a}$  – коэффициенты, выраженные через параметры основания [14];  $w_p(r)$  – частное решение.

Соответственно общее решение задачи об изгибе связанной с упругим основанием круговой упругой трёхслойной пластины с отверстием с учётом формул (12), (13) принимает вид

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r};$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r};$$

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r) + w_p(r). \quad (14)$$

В случае сплошной пластины [14] достаточно было четырёх уравнений для определения констант интегрирования, так как  $C_2$ ,  $C_4$ ,  $C_6$ ,  $C_8$  обнулялись из-за ограничения решения в центре пластины. Здесь для нахождения постоянных интегрирования  $C_1$ – $C_8$  надо использовать восемь граничных условий (11).

**Случай равномерно распределённой нагрузки.** При  $q = q_0 = \text{const}$  с учётом частного решения  $w_p = q_0/k_1$  общее решение системы уравнений (10) может быть записано в виде

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r};$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r};$$

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa r) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa r) + \frac{q_0}{k_1}. \quad (15)$$

При этом необходимые нам в дальнейшем производные от прогиба

$$w_{,r}(R_1) = -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_6 - \\ - \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_8;$$

$$w_{,r}(R_0) = -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_6 - \\ - \kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_8. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в граничные условия (11), получаем систему восьми алгебраических уравнений для определения констант интегрирования:

$$\begin{aligned}
 b_1 w_{,r}(R_1) + C_1 R_1 + \frac{C_2}{R_1} &= 0; & b_1 w_{,r}(R_0) + C_1 R_0 + \frac{C_2}{R_0} &= 0; \\
 b_2 w_{,r}(R_1) + C_3 R_1 + \frac{C_4}{R_1} &= 0; & b_2 w_{,r}(R_0) + C_3 R_0 + \frac{C_4}{R_0} &= 0; \\
 C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) + \frac{q_0}{k_1} &= 0; \\
 C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) + \frac{q_0}{k_1} &= 0; \\
 -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_6 - \\
 -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_8 &= 0; \\
 -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_6 - \\
 -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_8 &= 0.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что на контурах пластины  $w_{,r}(R_0) = w_{,r}(R_1) = 0$ , имеем

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0. \quad (17)$$

Следовательно, для определения констант интегрирования  $C_5$ – $C_8$  надо решить систему четырёх уравнений:

$$\begin{aligned}
 C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R_0) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) &= -\frac{q_0}{k_1}; \\
 C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R_1) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) &= -\frac{q_0}{k_1}; \\
 -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_6 - \\
 -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_0) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_0) C_8 &= 0; \\
 -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_5 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(1)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_6 - \\
 -\kappa \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R_1) C_7 - \kappa \sqrt{a} H_1^{(2)}(\sqrt{a} \kappa R_1) C_8 &= 0. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (18) выполним методом Крамера:

$$C_5 = \frac{W_1}{W_0}, C_6 = \frac{W_2}{W_0}, C_7 = \frac{W_3}{W_0}, C_8 = \frac{W_4}{W_0}, \quad (19)$$

где  $W_0$  – определитель системы (18);  $W_1$ – $W_4$  – определители:

$$W_1 = \begin{vmatrix} -\frac{q_0}{k_1} & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ -\frac{q_0}{k_1} & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \\ 0 & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ 0 & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \end{vmatrix},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\frac{q_0}{k_1} & J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\frac{q_0}{k_1} & J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & 0 & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & 0 & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \end{vmatrix},$$

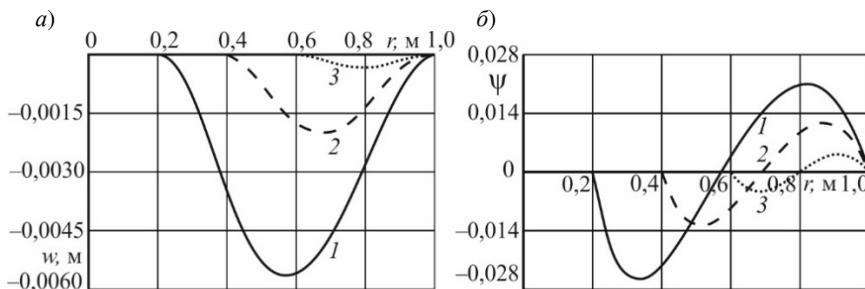
$$W_3 = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\frac{q_0}{k_1} & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\frac{q_0}{k_1} & H_0^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & 0 & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_0) \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & 0 & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(2)}(\sqrt{a}\kappa R_1) \end{vmatrix},$$

$$W_4 = \begin{vmatrix} J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & J_0(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\frac{q_0}{k_1} \\ J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & H_0^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & J_0(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\frac{q_0}{k_1} \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_0) & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_0) & 0 \\ -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}H_1^{(1)}(\sqrt{a}\kappa R_1) & -\kappa\sqrt{a}J_1(\sqrt{a}\kappa R_1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, решение (15) с константами интегрирования (17), (19) описывает перемещения при изгибе круговой трёхслойной пластины с центральным осесимметричным отверстием, которая связана с упругим основанием Пастернака, в случае жёсткого закрепления внутреннего и внешнего ее контуров.

**Численные исследования.** Для апробации полученного аналитического решения разработан комплекс программ в среде программного пакета Maple, с помощью которого проведён численный параметрический анализ. Расчеты проведены для металлополимерной пластины (Д16Т–фторопласт–4–Д16Т), необходимые физико-механические характеристики материалов можно найти в [4]. Внешний радиус  $R_1 = 1$  м, толщины слоёв:  $h_1 = 0,04$  м,  $h_2 = 0,04$  м,  $h_3 = 0,4$  м. Первый коэффициент постели  $k_1 = 100$  МПа/м. Интенсивность равномерно распределённой нагрузки  $q_0 = -1$  МПа.

Графики на рисунке 2 показывают зависимость прогиба  $w$  (а) и сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) от радиуса отверстия  $R_0$ , м: 1 –  $R_0 = 0,2$ ; 2 –  $R_0 = 0,4$ ; 3 –  $R_0 = 0,6$ . Второй коэффициент постели  $k_2 = 10$  МПа·м. При увеличении центрального отверстия перемещения убывают в связи с изменением жёсткости пластины и уменьшением эквивалентной площади, воспринимающей нагрузку.

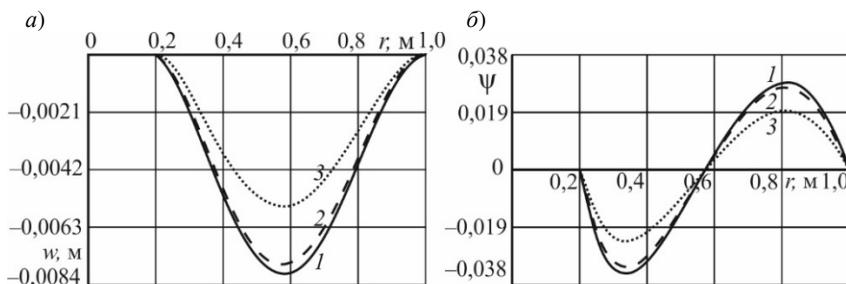


1 –  $R_0 = 0,2$  м; 2 –  $R_0 = 0,4$  м; 3 –  $R_0 = 0,6$  м

Рисунок 2 – Изменение прогиба  $w$  (а) и сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) при различных значениях радиуса отверстия

На рисунке 3 показано изменение вдоль радиуса пластины прогиба  $w$  (а) и относительного сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) в зависимости от второго коэффициента постели  $k_2$ , МПа·м: 1 –  $k_2 = 0$ , 2 –  $k_2 = 1$ , 3 –  $k_2 = 10$ . Размер отверстия не изменяется,  $R_0 = 0,2$  м.

При малых значениях коэффициента сдвига  $k_2 < 1$  МПа·м изменения искомых величин несущественны. При  $k_2 = 1$  МПа·м (кривая 2) максимумы перемещений уменьшаются на 5,1 %, при  $k_2 = 10$  МПа·м (кривая 3) – на 31,5 %. Учитывая второй коэффициент постели, существенно уменьшаются перемещения в исследуемом случае.



$1 - k_2 = 0$  МПа·м,  $2 - k_2 = 1$  МПа·м,  $3 - k_2 = 10$  МПа·м

Рисунок 3 – Изменение прогиба  $w$  (а) и сдвига в заполнителе  $\psi$  (б) при различных значениях второго коэффициента постели

**Выводы.** Исследован симметричный изгиб трёхслойной круговой пластины на упругом основании. Учтено наличие технологического или функционального отверстия. Численно исследован изгиб жёстко закреплённой металлополимерной пластины под действием равномерно распределённой нагрузки.

Анализ полученных численных результатов показал, что, несмотря на неочевидные преимущества от увеличения отверстия в пластине, это приводит к уменьшению перемещений за счёт перераспределения нагрузки и изменения геометрических характеристик пластины; использование модели основания с двумя коэффициентами постели позволяет учесть распределительную способность грунта, за счёт этого с ростом коэффициента сдвига перемещения уменьшаются.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т24М-004).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 **Болотин, В. В.** Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков. – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.
- 2 **Reddy, J. N.** Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis / J. N. Reddy. – 2<sup>nd</sup> ed. – Boca Raton : CRC Press, 2003. – 858 p.
- 3 **Горшков, А. Г.** Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : Физматлит, 2005. – 576 с.
- 4 **Плескачевский, Ю. М.** Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. – М. : Физматлит, 2011. – 560 с.
- 5 **Yarovaya, A. V.** Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation / A. V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, no. 2. – P. 206–213.
- 6 **Старовойтов, Э. И.** Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 9. – С. 94–103.

7 Яровая, А. В. Изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании погонными нагрузками / А.В. Яровая // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 212–217.

8 Козел, А. Г. Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А. Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. – 2021. – № 1 (54). – С. 30–37.

9 Пастернак, П. Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П. Л. Пастернак. – М. : Госстройиздат, 1954. – 56 с.

10 Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – № 1. – С. 59–63.

11 Size-dependent instability of organic solar cell resting on Winkler–Pasternak elastic foundation based on the modified strain gradient theory / Q. Li [et al.] // International Journal of Mechanical Sciences. – 2020, 105306. – Vol. 177.

12 Ерофеев, В. И. Дисперсионные и энергетические характеристики изгибных волн в пластине, лежащей на двухпараметрическом упругом основании / В. И. Ерофеев, Е. Е. Лисенкова // Акустический журнал. – 2023. – Т. 69, № 3. – С. 277–283.

13 Arefi, M. Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation / M. Arefi, M. N. M. Allam // Smart Structures and Systems. – 2015. – Vol. 16, no.1. – P. 81–100.

14 Старовойтов, Э. И. Влияние жесткости основания Пастернака на деформирование круговой трёхслойной пластины / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2019. – № 2. – С. 107–114.

15 Козел, А. Г. Деформирование физически нелинейной трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – Вып. 12. – С. 105–112.

16 Козел, А. Г. Термосиловой изгиб упругой трехслойной пластины, свободно лежащей на основании Пастернака / А. Г. Козел // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 86–99.

*A. G. KOZEL*

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

## **BENDING OF A THREE-LAYER CIRCULAR PLATE WITH A HOLE ON AN ELASTIC BASE**

The problem of axisymmetric bending of a circular three-layer plate with a central hole is solved. The reaction of the base is determined by two bed factors. The analytical solution is obtained in Bessel and Hankel functions. The case of uniform load distribution is considered. The integration constants corresponding to rigid fixation of the plate contours are determined. The influence of the hole radius and the base characteristics on the plate displacements is numerically investigated.

**Keywords:** circular three-layer plate, elasticity, plate with a hole, axisymmetric bending, Pasternak model.

Получено 30.10.2024