

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

The diagram shows a rod AB of length h pivoted at point A. The rod makes a 45° angle with the horizontal x -axis. A particle $D(t_3)$ is moving along a dashed parabolic path. At a certain instant, the particle is at a horizontal distance d from the vertical line through A. The rod AB makes a 60° angle with the horizontal at this instant. The particle's velocity vector $\vec{v}_B$ is shown tangent to the path. A coordinate system (x, y) is centered at the pivot A, and another system (x_1, y_1) is attached to the rod. Forces acting on the rod are $\vec{N}$ (normal force) and $\vec{F}_{\text{тр}}$ (friction force) at point B, and $\vec{G}$ (weight) at the center of mass. The particle $D(t_3)$ is acted upon by its weight $\vec{G}$.

Решение

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i,$$

$$ma_{x1} = G \cos 45^\circ + P \cos 15^\circ - F_{mp} ;$$

$$ma_{y1} = N - G \cos 45^\circ - P \cos 75^\circ.$$

$$ma_{\tau} = G \cos 45^{\circ} + P \cos 15^{\circ} - F_{\text{Tp}} ;$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата								
Разраб.	Механиков				Расчетно-графическая работа №1			Лит.	Лист	Листов		
Пров.	Кракова									1		
								БелГУТ кафедра «ТФ и ТМ»				
Н.												
Утв.												

$$v_A = 5 - 2,73 = 2,27 \text{ м/с},$$

$$v_B = 2,27 + 5,46 = 7,73 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение точки на участке BC . На точку действует только сила тяжести G . Введем новую систему координатных осей с началом в точке B . Запишем динамические уравнения движения в проекциях на оси координат:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i,$$

$$ma_x = 0, \quad ma_y = G,$$

$$a_x = 0, \quad a_y = g,$$

$$\text{Из кинематики известно } a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

Чтобы найти законы изменения проекций вектора скорости решим дифференциальные уравнения:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = g,$$

$$dv_x = 0, \quad dv_y = gdt,$$

$$\int_{v_{Bx}}^{v_x} dv_x = 0, \quad \int_{v_{By}}^{v_y} dv_y = g \int_0^t dt,$$

$$v_x - v_{Bx} = 0, \quad v_y - v_{By} = gt,$$

Из расчетной схемы находим проекции вектора скорости точки в положении B :

$$v_{Bx} = v_B \cos 45^\circ, \quad v_{By} = v_B \cos 45^\circ.$$

Таким образом, получаем

$$v_x = v_B \cos 45^\circ, \quad v_y = v_B \cos 45^\circ + gt.$$

Найдем законы изменения координат точки на участке BC . Известно:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Решим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v_B \cos 45^\circ, \quad \frac{dy}{dt} = v_B \cos 45^\circ + gt.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$dx = v_B \cos 45^\circ dt, \quad dy = (v_B \cos 45^\circ + gt)dt,$$

$$\int_0^x dx = v_B \cos 45^\circ \int_0^t dt, \quad \int_0^y dy = \int_0^t (v_B \cos 45^\circ + gt)dt,$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист
										3

$$x = v_B \cos 45^\circ t, \quad y = v_B \cos 45^\circ t + g \frac{t^2}{2}.$$

Получили законы изменения координат точки.

В положении С точки: $x = x_C = d + EK = d + h / \operatorname{tg} 60^\circ$, $y = y_C = h$, $t = t_2$.

$$d + h / \operatorname{tg} 60^\circ = v_B \cos 45^\circ t_2,$$

$$h = v_B \cos 45^\circ t_2 + g \frac{t_2^2}{2}.$$

Подставим значения известных величин и решим систему уравнений.

$$d + 5 / \operatorname{tg} 60^\circ = 7,73 \cos 45^\circ t_2,$$

$$5 = 7,73 \cos 45^\circ t_2 + 4,9 t_2^2.$$

$$4,9 t_2^2 + 5,47 t_2 - 5 = 0,$$

$$D = 5,47^2 + 4 \cdot 5 \cdot 4,9 = 127,92;$$

$$t_2 = \frac{-5,47 + 11,3}{9,8} = 0,6 \text{ с.} \quad \text{— время движения на участке ВС.}$$

Находим расстояние d .

$$d = 7,73 \cos 45^\circ t_2 - 10 / \operatorname{tg} 60^\circ = 5,47 \cdot 0,6 - 2,9 = 0,38 \text{ м.}$$

Определим скорость точки в положении D в момент времени $t_3 = 0,4$ с:

$$v_{Dx} = v_x(t_3) = v_B \cos 45^\circ = 5,47 \text{ м/с},$$

$$v_{Dy} = v_y(t_3) = v_B \cos 45^\circ + g t_3 = 5,47 + 9,8 \cdot 0,4 = 9,39 \text{ м/с.}$$

Модуль скорости равен

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = \sqrt{5,47^2 + 9,39^2} = 10,88 \text{ м/с},$$

Ответ: $v_A = 2,27$ м/с, $d = 0,38$ м, $v_D = 10,88$ м/с.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Инв. № дубл.	Взам. Инв. №	Подп. и дата				
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата				
					Лист			
					4			

Определим работы каждой из действующих сил.

$$A(\bar{G}) = -mg\Delta h_1 = -mgL_{AB} \sin \alpha = -0,3 \cdot 9,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = -0,88 \text{ Дж},$$

$$A(\bar{F}_{mp}) = -\mu NL_{AB}.$$

Чтобы найти силу N , запишем основной закон динамики точки в проекции на ось y

$$ma_y = N - G \cos \alpha, \text{ т.к. движение вдоль оси } y \text{ отсутствует, то } a_y = 0.$$

Тогда $N = G \cos \alpha$ и

$$A(\bar{F}_{mp}) = -\mu G \cos \alpha L_{AB} = -0,15 \cdot 0,3 \cdot 9,8 \cdot 0,6 \cdot 0,866 = -0,23 \text{ Дж}.$$

$$A(\bar{N}) = NL_{AB} \cos 90^\circ = 0.$$

Работа силы упругости определяется по формуле

$$A(\bar{F}_{упр}) = -\frac{c}{2} [\Delta l_1^2 - \Delta l_0^2].$$

В начальный момент по условию пружина была сжата на $\Delta l_0 = \Delta l$. Когда шарик отделяется от пружины, она принимает свое недеформированное состояние, т.е. конечная деформация $\Delta l_1 = 0$. Тогда

$$A(\bar{F}_{упр}) = \frac{c}{2} \Delta l^2 = \frac{520}{2} 0,1^2 = 2,6 \text{ Дж}.$$

$$\text{Суммируем работы сил } \sum A(\bar{F}_i) = -0,88 - 0,23 + 2,6 = 1,49 \text{ Дж}.$$

Подставляем в выражение теоремы для участка AB с учетом $v_A = 0 \text{ м/с}$ получаем

$$\frac{mv_B^2}{2} = 1,49.$$

Отсюда находим скорость в положении В

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,49}{m}} = \sqrt{\frac{2,98}{0,3}} = 3,15 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение шарика на участке BC . Так как на данном участке задано перемещение (его можно найти через заданные радиусы и углы), то используем теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = \sum A(\bar{F}_i).$$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. Инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата					
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					
					Лист				
					6				

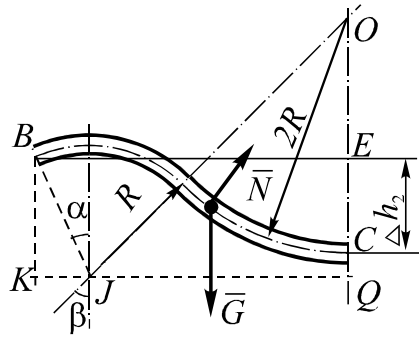


Рисунок 4

На криволинейном участке BC на шарик действуют сила тяжести и реакция опоры:

$$\sum A(\bar{F}_i) = A(\bar{G}) + A(\bar{N}) = A(\bar{G}),$$

$$\text{т. к. } A(\bar{N}) = 0.$$

$$A(\bar{G}) = mg\Delta h_2.$$

Из геометрии схемы определим Δh_2 .

$$\Delta h_2 = CE = BK - CQ, \quad BK = R \cos \alpha = 0,5 \cos 30^\circ = 0,43 \text{ м},$$

$$CQ = OQ - OC = 3R \cos \beta - 2R = R(3 \cos 45^\circ - 2) = 0,06 \text{ м}.$$

$$\text{Тогда } \Delta h_2 = CE = 0,43 - 0,06 = 0,37 \text{ м}.$$

Подставляем в выражение теоремы

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = mg\Delta h_2, \text{ сократим на массу } m$$

$$\frac{v_C^2}{2} - \frac{v_B^2}{2} = g\Delta h_2,$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + 2g\Delta h_2} = \sqrt{3,15^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 0,37} = 4,14 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение материальной точки на участке CD . На участке CD на материальную точку действуют: сила тяжести, нормальная реакция, сила трения скольжения (рисунок 5). Так как на участке CD известно время движения точки, то для определения скорости в положении C применим теорему об изменении количества движения материальной точки.

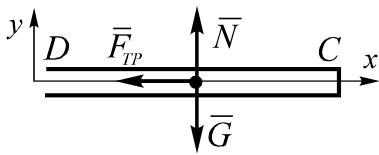


Рисунок 5

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. Инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
				Лист
				7

$$m\bar{v}_D - m\bar{v}_C = \sum \bar{S}(\bar{F}_i) = \sum \int_0^{\tau} \bar{F}_i dt.$$

Спроецируем выражение теоремы на оси координат:

$$Dx: mv_D - mv_C = \int_0^{t_{CD}} -F_{mp} dt,$$

$$Dy: 0 = \int_0^{t_{CD}} (N - G) dt.$$

Проинтегрируем полученные выражения

$$mv_D - mv_C = -F_{mp} t_{CD},$$

$$0 = (N - G) t_{CD}.$$

Из второго уравнения находим $N = G$. Тогда сила трения на участке CD будет равна $F_{mp} = \mu N = \mu mg$. Подставляем в первое уравнение

$$mv_D - mv_C = -\mu mgt_{CD},$$

$$v_D - v_C = -\mu gt_{CD}.$$

Отсюда находим скорость в положении D

$$v_D = v_C - \mu gt_{CD} = 4,14 - 0,15 \cdot 9,8 \cdot 1,5 = 1,94 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_B = 3,15 \text{ м/с}$, $v_C = 4,14 \text{ м/с}$, $v_D = 1,94 \text{ м/с}$.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата					
Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					
					Лист				
					8				

ИНВ. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	инв. № дубл.	Подп. и дата

Известно: $F = 2mg$, Н, $M_c = 2mgr$, Н·м, $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, радиус инерции блока 2 – $i_{2z} = r\sqrt{3}$, $R = 2r$, $r_3 = 0,8r$, вал 3 считать сплошным однородным цилиндром.

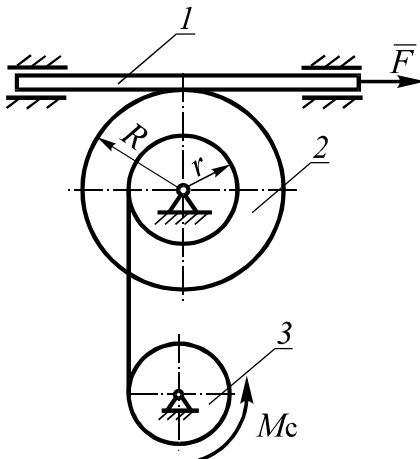


Рисунок 6 – Исходная схема исследуемой механической системы

Разобьем систему на составляющие тела. На рейку 1 действуют сила тяжести, активная сила и в точке зацепления рейки и блока (точка С) нормальная сила и окружное усилие. Рейка движется поступательно. Ее движение описывается с помощью теоремы о движении центра масс

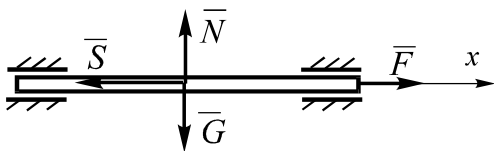


Рисунок 7

$$m_1 \bar{a}_1 = \sum \bar{F}_i .$$

В проекции на ось x

$$m_1 a_1 = F - S \quad (1)$$

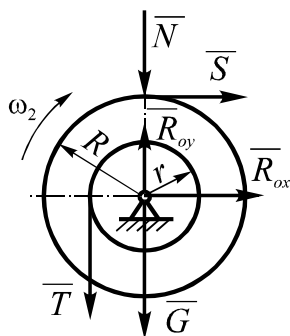


Рисунок 8

Блок 2 совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через его центр масс. На него действуют: сила тяжести, реакции шарнира O , сила натяжения, в точке C – нормальная сила и окружное усилие (рисунок 8). Движение блока 2 описывается с помощью уравнения

$$\begin{cases} m_1 a_1 = F - S; \\ 4mr^2 \frac{a_1}{2r} = SR - Tr; \\ \frac{m_3 r_3^2}{2} \frac{a_1}{2r_3} = Tr_3 - M_c. \end{cases} \quad (5)$$

В данной системе три неизвестные: a_1 , T , S . Из первого уравнения системы (5) выражаем силу S

$$S = F - m_1 a_1.$$

Из третьего уравнения системы (5) выражаем силу натяжения нити T

$$T = \frac{m_3 r_3^2}{2} \frac{a_1}{2r_3^2} + \frac{M_c}{r_3}.$$

Подставляем выражения для сил во второе уравнение системы (5)

$$4mr^2 \frac{a_1}{2r} = (F - m_1 a_1) 2r - \left(\frac{m_3 r_3^2}{2} \frac{a_1}{2r_3^2} + \frac{M_c}{r_3} \right) r,$$

Отсюда выражаем ускорение a_1 :

$$4mr^2 \frac{a_1}{2r} + \frac{m_3 r_3^2}{2} \frac{a_1 r}{2r_3^2} + m_1 a_1 2r = F 2r - \frac{M_c r}{r_3},$$

$$a_1 \left(2mr + \frac{mr}{4} + m 2r \right) = F 2r - \frac{M_c r}{r_3},$$

$$a_1 = \frac{2Fr_3 - M_c}{r_3 \left(2m + \frac{m}{4} + 2m \right)} = \frac{2 \cdot 2mg \cdot 0,8r - 2mgr}{0,8r \cdot 4,25m} = \frac{1,2g}{3,4} = 3,46 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_1 = 3,46 \text{ м/с}^2$.

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата					
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата					
					Лист 11				