



$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4e^{2t}.$$

В момент времени  $t_1 = 1$  с

$$a_{x_1} = 2e = 5,4 \text{ см/с}^2; a_{y_1} = 4e^2 = 29,6 \text{ см/с}^2.$$

Линейное ускорение точки найдем по формуле

$$a_1 = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2},$$

$$a_1 = \sqrt{5,44^2 + 29,6^2} = 30,1 \text{ см/с}^2.$$

Определяем касательное ускорение точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 2\sqrt{e^{2t} + e^{4t}} \right) = 2 \cdot \frac{2e^{2t} + 4e^{4t}}{2\sqrt{e^{2t} + e^{4t}}} = \frac{2e^{2t}(1 + 2e^{2t})}{e^t \sqrt{1 + e^{2t}}} = 2e^t \frac{(1 + 2e^{2t})}{\sqrt{1 + e^{2t}}}.$$

В момент времени  $t_1 = 1$  с

$$a_\tau = 2 \cdot 2,72 \frac{(1 + 2 \cdot 2,72^2)}{\sqrt{1 + 2,72^2}} = \frac{85,93}{2,9} = 29,6 \text{ см/с}^2.$$

Проверим правильность вычисления касательного ускорения по формуле

$$a_{\tau 1} = \frac{v_{x_1} a_{x_1} + v_{y_1} a_{y_1}}{v_1} = \frac{5,4 \cdot 5,4 + 14,8 \cdot 29,6}{15,7} = 29,8 \text{ см/с}^2.$$

Зная полное и касательное ускорения, находим нормальное ускорение точки из соотношения

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2; \rightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

В момент времени  $t_1 = 1$  с

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{30,1^2 - 29,6^2} = 5,5 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории определим из формулы

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

В момент времени  $t_1 = 1$  с

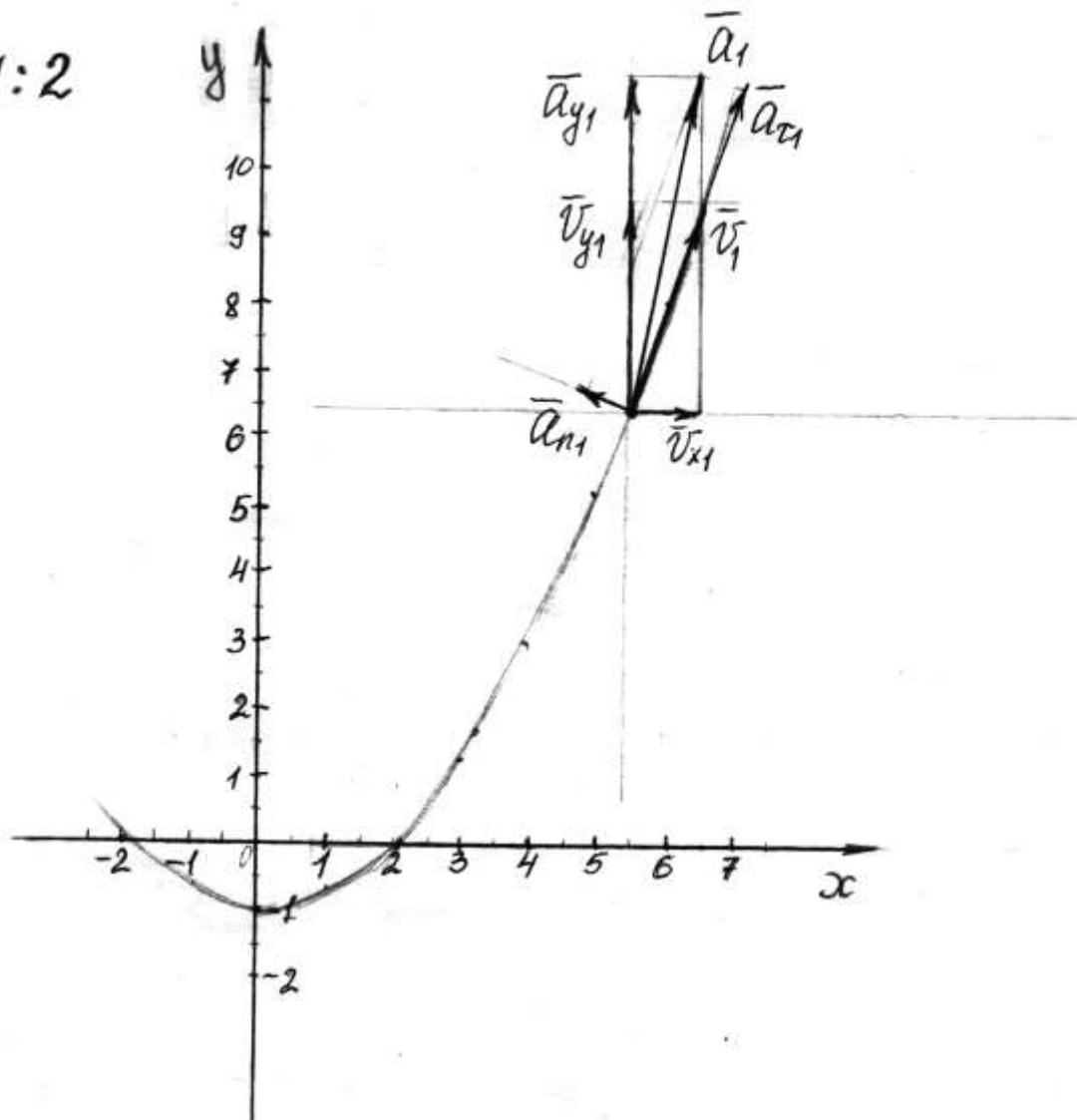
$$\rho_1 = \frac{15,7^2}{5,5} = 44,8 \text{ м}.$$

Строим траекторию движения и вектора скоростей и ускорений

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. Инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист
					2

$\bar{v}; \bar{a} \ 1:2$



Ответ: точка движется по параболе, в момент времени  $t_1 = 1$  с имеет следующие значения скорости и ускорений:  $v_1 = 15,7$  см/с,  $a_1 = 30,1$  см/с<sup>2</sup>,  $a_{\tau 1} = 29,6$  см/с<sup>2</sup>,  $a_{n1} = 5,5$  см/с<sup>2</sup>; радиус кривизны траектории равен 44,8 м.

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. Инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
-----	------	----------	-------	------

### К-7 Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Треугольная пластина  $OAB$  вращается вокруг оси  $O$  в горизонтальной плоскости по закону  $\varphi = 0,25t^2 + t$ , рад (рисунок 2). Точка  $M$  движется относительно пластины вдоль паза согласно уравнению  $s = 3t^2 + 3$  (см);  $AB = 15$  см.

Определить: абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t_1 = 2$  с.

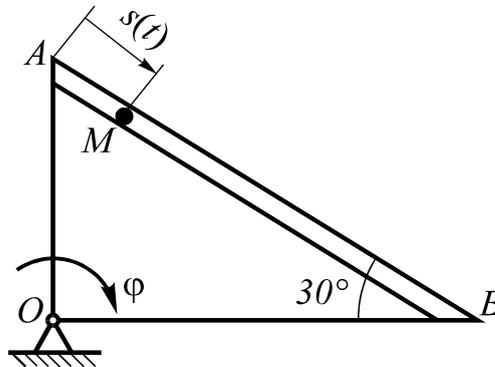


Рисунок 2 – Исходная схема

Решение

1 Определяем положение точки в заданный момент времени (рисунок 3)

$$s(t_1) = AM = 3 \cdot 2^2 + 3 = 15 \text{ см.}$$

2 Выделяем переносное и относительное движение точки и находим ее абсолютную скорость.

Точка  $M$  движется сложно. Переносным движением является вращение пластины вокруг вертикальной оси по закону  $\varphi = \varphi(t)$ . Относительным – движение точки  $M$  по пазу в соответствии с уравнением  $s = s(t)$ .

Абсолютную скорость определим по формуле

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}}. \quad (1)$$

Поскольку переносное движение вращательное, то для расчета значения переносной скорости воспользуемся формулой

$$v_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} h,$$

где  $h = OM_1 = 15$  см (т. к.  $OA = AM_1 = 15$  см,  $\angle OAB = 60^\circ$ ,  $\triangle OAM_1$  равносторонний).

Угловая скорость переносного вращения равна

$$\omega_{\text{пер}} = \frac{d\varphi}{dt} = 0,5t + 1,$$

$$\omega_{\text{пер}}(t_1) = 0,5 \cdot 2 + 1 = 2 \text{ рад/с.}$$

Таким образом,

$$v_{\text{пер}} = 2 \cdot 15 = 30 \text{ см/с.}$$

Относительное движение – движение вдоль паза (прямолинейное), следовательно, относительную скорость определим по формуле

Изн. № подл.	Подп. и дата
Взам. Изв. №	Подп. и дата
Изн. № дубл.	Подп. и дата

Изн. № подл.	Изм. Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист
					4

$$v_{\text{отн}} = \frac{ds}{dt} = 6t.$$

В заданный момент времени  $t_1 = 2$  с

$$v_{\text{отн}}(t_1) = 6 \cdot 2 = 12 \text{ см/с.}$$

Строим вектора скоростей (рисунок 3).

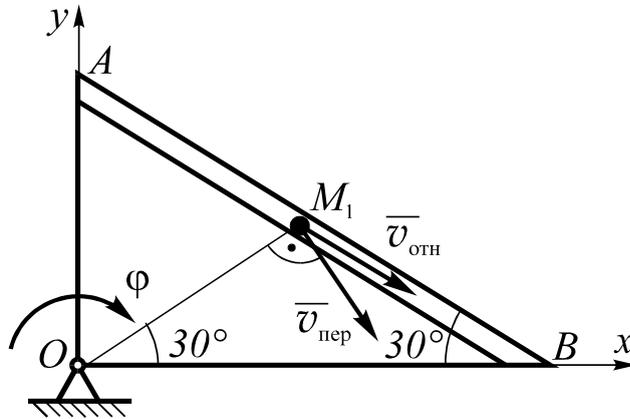


Рисунок 3 – Построение векторов скоростей

Найдем проекции вектора абсолютной скорости на оси координат. Для этого спроецируем выражение (1) на координатные оси.

$$v_{\text{абс}_x} = v_{\text{пер}} \cos 60^\circ + v_{\text{отн}} \cos 30^\circ = 30 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,866 = 25,4 \text{ см/с,}$$

$$v_{\text{абс}_y} = -v_{\text{пер}} \cos 30^\circ - v_{\text{отн}} \cos 60^\circ = -30 \cdot 0,866 - 12 \cdot 0,5 = -32 \text{ см/с.}$$

Модуль абсолютной скорости равен

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{абс}_x}^2 + v_{\text{абс}_y}^2} = \sqrt{25,4^2 + 32^2} = 40,9 \text{ см/с.}$$

3 Определяем абсолютное ускорение точки М.

Для его расчета воспользуемся теоремой Кориолиса:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{пер}}^n + \vec{a}_{\text{пер}}^\tau + \vec{a}_{\text{отн}}^n + \vec{a}_{\text{отн}}^\tau + \vec{a}_{\text{кор}}. \quad (2)$$

Переносное движение вращательное, поэтому расчет ускорений при этом виде движения выполняем по формулам:

$$a_{\text{пер}}^\tau = \varepsilon_{\text{пер}} h; \quad a_{\text{пер}}^n = \omega_{\text{пер}}^2 h.$$

Поскольку

$$\varepsilon_{\text{пер}} = \frac{d\omega_{\text{пер}}}{dt} = 0,5 \text{ рад/с}^2,$$

то при подстановке численных значений получаем:

$$a_{\text{пер}}^\tau = 0,5 \cdot 15 = 7,5 \text{ см/с}^2; \quad a_{\text{пер}}^n = 2^2 \cdot 15 = 60 \text{ см/с}^2.$$

В относительном движении точка движется прямолинейно, следовательно  $a_{\text{отн}}^n = 0$ , а касательное ускорение определяем по формуле

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. Инв. №	Подп. и дата
Инв. № дубл.	Подп. и дата
Подп. и дата	

Изм	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

$$a_{\text{отн}}^{\tau} = \frac{dv_{\text{отн}}}{dt} = 6 \text{ см/с}^2.$$

Кориолисово ускорение рассчитываем по формуле

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}}v_{\text{отн}} \sin(\angle \vec{\omega}_{\text{пер}}, \vec{v}_{\text{отн}}),$$

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot \sin 90^{\circ} = 48 \text{ см/с}^2.$$

Строим вектора ускорений (рисунок 4).

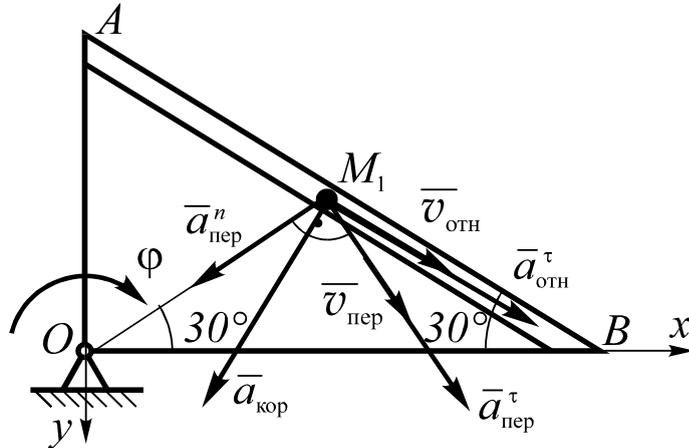


Рисунок 4 – Построение векторов ускорений

Для расчета значений проекций абсолютного ускорения спроецируем векторы, входящие в теорему Кориолиса (2) на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} O_x: a_{\text{abc}_x} &= a_{\text{пер}}^{\tau} \cos 60^{\circ} - a_{\text{пер}}^n \cos 30^{\circ} + a_{\text{отн}}^{\tau} \cos 30^{\circ} - a_{\text{кор}} \cos 60^{\circ} = \\ &= 7,5 \cdot 0,5 - 60 \cdot 0,866 + 6 \cdot 0,866 - 48 \cdot 0,5 = -67 \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_y: a_{\text{abc}_y} &= a_{\text{пер}}^{\tau} \cos 30^{\circ} + a_{\text{пер}}^n \cos 60^{\circ} + a_{\text{отн}}^{\tau} \cos 60^{\circ} + a_{\text{кор}} \cos 30^{\circ} = \\ &= 7,5 \cdot 0,866 + 60 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 + 48 \cdot 0,866 = 81,1 \text{ см/с}^2; \end{aligned}$$

Находим искомое значение абсолютного ускорения точки

$$a_{\text{abc}} = \sqrt{a_{\text{abc}_x}^2 + a_{\text{abc}_y}^2} = \sqrt{67^2 + 81,1^2} = 105,2 \text{ см/с}^2.$$

$$\text{Ответ: } v_{\text{abc}} = 40,9 \text{ см/с}, a_{\text{abc}} = 105,2 \text{ см/с}^2$$

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. Инв. №	
Инв. № дубл.	
Подп. и дата	

### К-13. Определение ускорений в плоском стержневом механизме

Ползун  $A$  движется вдоль вертикальной направляющей по закону  $s_A = 5t^2 - 3t$ , см, приводя в движение ползун  $B$ , связанный с ним невесомым стержнем  $AB = 60$  см (рисунок 5). Известно  $AC = 20$  см.

Определить: скорость и ускорение точек  $B$  и  $C$  в изображенном на рисунке положении, соответствующем моменту времени  $t_1 = 2$  с.

Решение

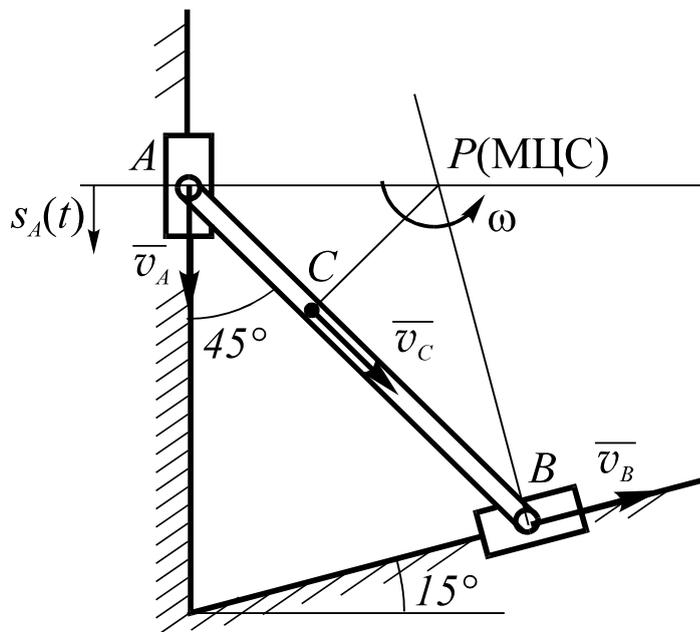


Рисунок 5 – Исходная схема

Ползуны  $A$  и  $B$  движутся поступательно прямолинейно. Стержень  $AB$  движется плоско.

Зная закон движения ползуна  $A$  найдем его скорость

$$v_A = \frac{ds}{dt} = 10t - 3.$$

В заданный момент времени  $t_1 = 2$  с

$$v_A = \frac{ds}{dt} = 10 \cdot 2 - 3 = 17 \text{ см/с.}$$

Строим вектора скоростей точек  $A$  и  $B$ , определяем положение МЦС звена  $AB$  (точка  $P$ ). Зная положение МЦС можно определить скорости точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  по формулам:

$$v_A = \omega \cdot AP; v_B = \omega \cdot BP; v_C = \omega \cdot CP.$$

Инв. № подл.	Взам. Инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата



Ускорения точки  $B$  при ее движении вокруг полюса – точки  $A$  найдем по формулам

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB ; a_{BA}^n = \omega^2 AB .$$

Тогда  $a_{BA}^n = 0,55^2 \cdot 60 = 18,15 \text{ см/с}^2$ .

Строим вектора ускорений (рисунок 6).

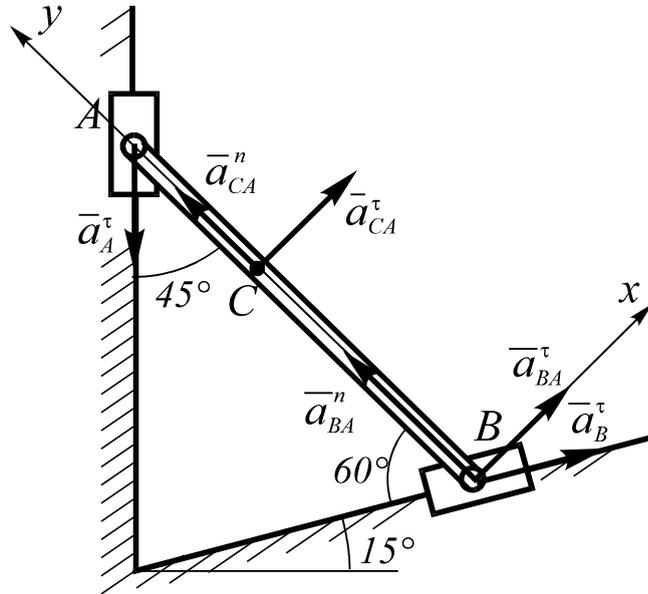


Рисунок 6 – Построения векторов ускорений

Спроецируем выражение (3) на оси координат

$$a_B^{\tau} \cos 30^{\circ} = -a_A^{\tau} \cos 45^{\circ} + a_{BA}^{\tau},$$

$$-a_B^{\tau} \cos 60^{\circ} = -a_A^{\tau} \cos 45^{\circ} + a_{BA}^n.$$

Решая полученные уравнения находим

$$a_B^{\tau} = \frac{a_A^{\tau} \cos 45^{\circ} - a_{BA}^n}{\cos 60^{\circ}} = \frac{10 \cdot 0,707 - 18,15}{0,866} = -22,16 \text{ см/с}^2$$

(знак минус говорит, что ускорение ползуна  $B$  направлено противоположно скорости);

$$a_{BA}^{\tau} = a_B^{\tau} \cos 30^{\circ} + a_A^{\tau} \cos 45^{\circ} = -22,16 \cdot 0,866 + 10 \cdot 0,707 = -12,12 \text{ см/с}^2.$$

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. Инв. №	Подп. и дата
Инв. № дубл.	Подп. и дата

