

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

**Кафедра «Организация дорожного движения»**

**В.Н. ГАЛУШКО**  
**С.А. АЗЕМША**

**ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА**  
**МОДЕЛИРОВАНИЯ ДТП**

**Гомель 2015**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Кафедра «Организация дорожного движения»

В.Н. ГАЛУШКО  
С.А. АЗЕМША

## ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДТП

*Одобрено методической комиссией факультета  
“Управление процессами перевозок”  
в качестве учебно-методического пособия*

Гомель 2015

УДК [621.31](075.8)  
ББК 31.2  
Г16

Рецензенты –

**В.Н. Галушко, С.А. Аземша**

**Г16** Программные средства моделирования ДТП : учеб. пособие / В.Н. Галушко, С.А. Аземша ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2015. – 221 с.

**ISBN 978-985-554-312-2**

Материал, представленный в пособии, позволит сформировать знания по методическим основам вычислительных экспериментов и обработки их результатов для получения научно обоснованных и достоверных выводов, знакомит с возможностями специализированных компьютерных программ исследования ДТП и путями их дальнейшего совершенствования.

Предназначено для магистрантов, обучающихся по специальности «Безопасность дорожного движения».

**УДК [621.31](075.8)  
ББК 31.2**

**ISBN 978-985-554-312-2**

© Галушко В.Н., Аземша С.А., 2015  
© Оформление. УО «БелГУТ», 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>СПИСОК УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ</b> .....	5
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	6
<b>1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВОЗМОЖНОСТЯХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ ИССЛЕДОВАНИЯ ДТП</b> .....	9
1.1 Основные термины и определения.....	9
1.2 Экспертизы ДТП.....	12
1.3 Факторы, влияющие на безопасность дорожного движения.....	29
1.4 Анализ существующего программного обеспечения, используемого при производстве автотехнических экспертиз.....	35
<b>2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ</b> .....	51
2.1 Методология математического моделирования.....	51
2.1.1 Математические модели и их виды.....	51
2.1.2 Адекватность математических моделей.....	63
2.1.3 Алгоритм научных исследований с помощью компьютерного моделирования.....	70
2.2 Методы разработки математических моделей.....	72
2.3 Вычислительные методы и приемы.....	83
2.3.1 Вычислительные методы алгебры.....	83
2.3.2 Вычислительные методы решения дифференциальных уравнений.....	91
2.3.3 Приемы контроля математических моделей.....	95
<b>3 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ</b> .....	97
3.1 Основы теории вероятностей.....	97
3.1.1 Необходимые сведения из теории случайных событий.....	97
3.1.2 Случайные величины и законы их распределения.....	100
3.1.3 Предельные теоремы теории вероятностей.....	112
3.2 Основы математической статистики.....	113
3.2.1 Отбор информации.....	114
3.2.2 Требования к точечным оценкам и объему выборок.....	119
3.2.3 Проверка статистических гипотез.....	122
3.2.4 Точность оценки. Доверительный интервал.....	130
3.3 Основы многомерного статистического анализа.....	130
3.3.1 Классификация задач многомерного статистического анализа.....	130
3.3.2 Регрессионный анализ.....	133
3.3.3 Корреляционный анализ.....	137
3.3.4 Дисперсионный анализ.....	142
3.3.5 Статистическая проверка адекватности компьютерного моделирования.....	148
<b>4 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА</b> .....	156

4.1 Статистические методы планирования эксперимента.....	156
4.1.1 Проблемы построения эксперимента.....	156
4.1.2 Назначение плана эксперимента.....	160
4.1.3 Планирование объема эксперимента.....	161
4.2 Особые методы планирования эксперимента.....	164
4.2.1 Специальные приемы планирования эксперимента.....	164
4.2.2 Методы экспертных оценок.....	166
<b>5 КОМПЬЮТЕРНЫЕ ПРОГРАММЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДОРОЖНО-</b>	
<b>    ТРАНСПОРТНЫХ ПРОИСШЕСТВИЙ.....</b>	<b>170</b>
5.1 Исходные материалы при исследовании ДТП.....	170
5.2 Компьютерная программа PC CРАН.....	174
5.2.1 Обзор основных команд программы.....	175
5.2.2 Дорожные объекты.....	177
5.2.3 Параметры транспортных средств и других объектов.....	182
5.2.4 Моделирование движения.....	186
5.2.5 Расчет и моделирование столкновений.....	193
5.2.6 Кинематический расчет.....	202
5.2.7 Многомассовые системы.....	209
5.2.8 Документирование и визуализация.....	214
5.3 Компьютерная программа Экспресс анализ ДТП ExрAn.....	216
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>218</b>

## **СПИСОК УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ**

АТЭ – автотехническая экспертиза  
БДД – безопасность дорожного движения  
ВАДС – водитель – автомобиль – дорога – среда  
ГАИ – государственная автоинспекция  
ДА – дисперсионный анализ  
ДТП – дорожно-транспортное происшествие  
ДТС – дорожно-транспортная ситуация  
КА – корреляционный анализ  
МК – микропроцессор  
ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения  
РА – регрессионный анализ  
СВ – случайная величина  
СЛС – сложная система  
СМО – система массового обслуживания  
СС – случайное событие  
ТС – транспортное средство  
ФА – факторный анализ  
ЦФ – целевая функция

## ВВЕДЕНИЕ

Дорожно-транспортные происшествия являются основной причиной гибели людей на дорогах. К числу основных причин дорожно-транспортных происшествий (ДТП) относят: несоблюдение правил дорожного движения (водителями и пешеходами); несоблюдение правил вождения; неудовлетворительное состояние дорог; технические неисправности транспортного средства; сложные погодные условия. Обстоятельства, при которых происходят ДТП, очень разнообразны и часто вызваны несколькими факторами.

Сложившееся положение с аварийностью в городах показывает, что традиционные подходы к решению проблемы организации безопасности дорожного движения недостаточны, чтобы добиться желаемого эффекта. Масштабность и сложность этой проблемы с учетом современных темпов развития транспортных средств, требуют совершенствования методов анализа причин ДТП и выбора эффективных мероприятий по повышению безопасности дорожного движения (БДД).

Действующая процедура реконструкции ДТП обладает рядом существенных недостатков, в том числе, низким уровнем объективности исходных данных, например, для ДТП, связанных с наездом на пешехода и столкновением транспортных средств (ТС) возможна недостоверная оценка таких параметров, как скорость передвижения пешехода, замедление ТС и т.п. Существующие методики определения вышеперечисленных параметров методом статистического усреднения недостаточно точны и практически неприемлемы в случае, когда исследуются ДТП, в котором пешеходом является ребенок. Большой разброс возможных скоростей передвижения пешеходов, устаревшие статистические данные, отсутствие информации о скоростях передвижения детей младше 7 лет, а также - привязки к маркам ТС говорит о необходимости проведения дополнительных научных исследований в этом направлении.

Применение компьютерного моделирования, основанного на анализе реальных ДТП, дифференциальных уравнениях динамики поступательного и вращательного движения твердого тела, законах сохранения импульса и момента импульса, позволяет повысить достоверность результатов модели-

рования, отбросить ложные версии произошедшего и увеличить вероятность установления истины.

Результаты, полученные с помощью умозрительно построенных моделей, не всегда хорошо соответствуют действительности – на результат действия выявленных законов накладывается влияние и других неучтенных факторов, и погрешностей эксперимента. Попытка учета этих факторов приводит к усложнению модели. Если таких факторов много, модель становится сложной и трудно воспринимаемой.

Например, расчет скорости движения транспортного средства (ТС) по длине следа торможения можно рассчитать по формуле

$$v_a = 1,8 t_3 \cdot j + \sqrt{25,92 j s_{т_ю}},$$

где  $t_3$  – время нарастания замедления (с);  $j$  – замедление (м/с<sup>2</sup>);  $s_{т_ю}$  – длина пути юза (м).

При компьютерном моделировании скорости движения транспортного средства (ТС) по длине следа торможения можно учесть: характеристики работы двигателя, параметры трансмиссии, модель шин каждого колеса, параметры работы подвески, распределение нагрузки, время срабатывания тормозной системы и рулевого привода, скорость вращения рулевого колеса, угол поворота управляемых колес, параметры работы тормозной системы.

Постановка компьютерного эксперимента нуждается не только в четкой формулировке цели исследований, но и в знании основных свойств оригинала. То есть перед постановкой и проведением эксперимента нужно не только формально провести его *планирование*, но и изучить объект, построить его описание и выбрать *модель*, хотя бы пробную. Если этого не делать, то можно совершить ошибку в отборе и *обработке информации*, ее оценке и прийти к выводам, прямо противоположным действительности [1].

Методики компьютерного моделирования при исследовании ДТП основаны на законах физики, теоретической механики, теории и конструкции автомобилей, теории соударения и т. д. При этом, как правило, происходит упрощение применяемых математических зависимостей. Это связано с ограничением числа задаваемых исходных параметров, упрощением процесса вычисления. Поэтому *актуальной* задачей является повышение достоверности исследований и сокращение сроков их производства. Применение специального программного обеспечения позволяет значительно повысить эффективность выполняемых работ по трем аспектам:

- ускоряется процесс расчетов;
- уменьшается вероятность ошибок арифметического характера;
- появляется возможность визуализации результатов исследования.

На данный момент на мировом рынке программного обеспечения существует много программных средств анализа ДТП, возможности части из них рассмотрены авторами в пособии.



Приведем, например, результаты моделирования лобового столкновения “Центра компьютерного инжиниринга” (ИЦ ЦКИ) НИУ СПбПУ на базе учебно-научной и инновационной лаборатории “Вычислительная механика” (CompMechLab®) [32]. На рисунке 0.1 представлены результаты конечно-элементного (КЭ) моделирования лобового столкновения автомобиля ВАЗ-21093 и грузовика ЗИЛ 433362. Легковой автомобиль двигался со скоростью 64 км/ч, грузовой –30 км/ч.

При моделировании учитывалось влияние радиатора, двигателя, передней и задней подвески, системы тормозов, колес автомобиля с учетом давления в них и многие другие детали с возможностью контактного взаимодействия, трение между асфальтом и шинами автомобилей, нелинейные свойства материалов. Модель автомобиля ВАЗ-21093 верифицирована с натурным тестом по методике EuroNCAP. Анализ столкновения основан на решении нелинейной динамической задачи ударного взаимодействия с использованием программного пакета *Simulia Abaqus*.

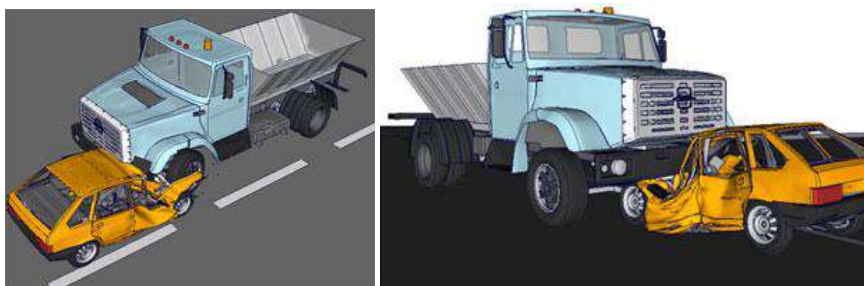


Рисунок 0.1 – Пример компьютерного моделирования лобового столкновения автомобилей ВАЗ-21093 и ЗИЛ-433362 лаборатории «Вычислительная механика»

Практическое применение компьютерных программ позволяет:

- для ГАИ: быстро регистрировать и оформлять ДТП; предоставлять схемы и данные для экспертов в удобной форме;
- для автоэкспертов: расследовать ДТП с учетом детализации параметров автомобиля, состояния дорожного полотна, погодных условий, освещенности, квалификации водителя; предоставлять данные в суд (в том числе видеореконструкции ДТП);
- для страховых компаний: восстанавливать события и определять возможное мошенничество.

Оценка достоверности моделирования при исследовании ДТП, освоение инструментария специализированных компьютерных программ, прогнозирование отклика на определенные управляющие мероприятия – вот некоторые из целей, которые ставит перед собой данное пособие.

# 1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВОЗМОЖНОСТЯХ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ ИССЛЕДОВАНИЯ ДТП

## 1.1 Основные термины и определения

Чтобы исходные данные при исследовании ДТП с помощью компьютерных программ были полными и объективными, исследователю необходимо знать следующие термины и понятия.

"Безопасность дорожного движения" – состояние дорожного движения, обеспечивающее минимальную вероятность возникновения опасности для движения и дорожно-транспортного происшествия.

"Дорожно-транспортное происшествие" – происшествие, совершенное с участием хотя бы одного находившегося в движении механического транспортного средства, в результате которого причинен вред жизни или здоровью физического лица, его имуществу либо имуществу юридического лица.

"Опасность для движения" – изменение условий дорожного движения или технического состояния транспортного средства, угрожающее безопасности участников дорожного движения, вынуждающее водителя снизить скорость движения или остановиться.

Практика показывает, что опасность для движения возникает при появлении препятствий, разезд с которыми невозможен, внезапном возникновении неисправностей ТС, исключающих возможность дальнейшего безопасного движения, смещении груза за габариты ТС, опасном поведении пешеходов, пассажиров, неправомерных действиях других участников движения и т. д. Под опасностью для движения понимаются также препятствия или особенности дорожной обстановки, которые создают на определенном участке дороги наибольшую вероятность возникновения ДТП. В первую очередь к ним относятся опасные участки дороги, обозначенные предупреждающими дорожными знаками.

"Дорожные условия" – факторы, которые характеризуют поверхность проезжей части дороги на месте ДТП и определяют взаимодействие с этой поверхностью колес транспортного средства и особенности его движения в зависимости от действий водителя.

К дорожным условиям относятся:

- тип покрытия проезжей части (асфальт, бетон, щебенка и др.);
- техническое состояние покрытия (ровное, прямое, выбоины и другие дефекты);
- состояние покрытия в зависимости от погоды (сухое, мокрое, обледенелое, укатанный снег и т. д.);
- наличие наслоений (грязь, масло, битум, опавшие листья и др.);
- ширина проезжей части и обочин;
- продольный профиль (горизонтальный, подъем или спуск в градусах);

- поперечный профиль (уклон, подъем в сторону обочины и др.);
- состояние освещенности;
- рельеф местности.

"Дорожная обстановка" – это совокупность обстоятельств, которые обязан учитывать водитель при выборе режима и полосы движения транспортного средства (ТС) и приемов управления им. Дорожная обстановка определяется дорожными условиями, а также видимостью, обзорностью, интенсивностью и характером движения других транспортных средств и пешеходов, наличием неподвижных препятствий, особенностями и техническим состоянием данного ТС и его скоростью. Понятие дорожной обстановки включает в себя также факторы, относящиеся к организации движения на конкретном участке дороги (линии разметки, дорожные знаки и сигналы светофоров (регулирующих), наличием перекрестков и закруглений дороги и т. п.). Данные о дорожной обстановке необходимы для решения вопросов о механизме происшествия и оценки действий его участников с точки зрения соответствия их техническим требованиям Правил дорожного движения.

"Видимость дороги" – максимальное расстояние в направлении движения, на котором с места водителя можно распознать элементы дороги и технические средства организации дорожного движения перед транспортным средством и правильно ориентироваться при управлении им.

"Недостаточная видимость дороги" – видимость дороги в направлении движения менее 300 метров, обусловленная погодными (метеорологическими) условиями (дождь, снег и иные атмосферные осадки) и другими факторами, снижающими прозрачность атмосферы (пыль, дым, туман, смог) [23].

Необходимо знать, что дальность видимости может ограничиваться:

- малой освещенностью препятствия (недостаточный свет фар, неправильная их установка и регулировка, нахождение препятствия в стороне от направления пучка света фар и т. п.);

- размерами препятствия, его окраской, сливающейся, например, с окружающим фоном;

- низкой прозрачностью воздуха;

- неудовлетворительным состоянием стекол, защищающих смотровые просветы, главным образом ветрового стекла и стекол фар (загрязнение, брызги дождя и снег при неработающем стеклоочистителе и т. п.), особенно в темное время суток при освещении светом фар встречных ТС. На месте происшествия состояние видимости устанавливается, как правило, следственным экспериментом, причем в обстановке, максимально приближенной к дорожной обстановке в момент происшествия.

"Обзорность дороги" – объективная возможность видеть дорожную обстановку с места водителя; "ограниченная обзорность дороги" – обзорность дороги, ограниченная геометрическими параметрами дороги, придорожными инженерными сооружениями, насаждениями и прочими объектами, а

также транспортными средствами. Обзорность дороги с водительского места может быть ограничена как внешними предметами (внешнее ограничение обзорности), так и частями самого ТС, а также предметами, движущимися вместе с ним (внутреннее ограничение обзорности).

Внешнее ограничение обзорности создается:

- стоящими или движущимися на близком расстоянии ТС;
- стенами домов, заборами, зелеными насаждениями и другими, находящимися близко от полосы движения ТС, предметами;
- границами ворот, въездных арок и другими объектами при выезде со двора, гаража и т. д.

Внутреннее ограничение обзорности создается:

- границами смотровых просветов (лобового и боковых стекол, зеркала заднего вида);
- дефектами или загрязнением стекол при неработающем или плохо отрегулированном стеклоочистителе; частями ТС (капотом, кабиной, кузовом, перевозимым грузом или пассажирами и т. п.).

Необходимо учитывать, что внутреннее ограничение обзорности может изменяться в зависимости от положения водителя на сиденье ТС.

"Помеха для движения" – препятствие (опасность), создаваемое одним из участников движения (иными лицами) для других участников движения, которое вынуждает изменить направление движения и скорость. К помехам для движения относятся: затрудняющие движение неподвижные препятствия, находящиеся на проезжей части дороги без предусмотренного Правилами дорожного движения ограждения (различные предметы, транспортные средства, остановленные либо оставленные в местах, где остановка либо стоянка запрещена, открытые люки и разрытия на проезжей части и т. п.); движущиеся транспортные средства, водители которых не пользуются преимущественным правом проезда; пешеходы, находящиеся на проезжей части дороги, когда это запрещено ПДД и т. п.

"Аварийная обстановка" – это ситуация, при которой другие участники движения были вынуждены изменить скорость, направление движения или принять иные меры для обеспечения собственной безопасности или безопасности других лиц. Аварийная обстановка возникает в том случае, если водитель мог обнаружить препятствие на расстоянии, превышающим остановочный путь, но не принял своевременных мер для предотвращения происшествия, или если он мог обнаружить препятствие на расстоянии меньшем, чем остановочный путь ТС.

Аварийная обстановка также создается теми участниками движения, которые своими не соответствующими правилам действиями (либо бездействием) лишают себя или других участников дорожного движения технической возможности предотвратить происшествие.

"Препятствие для дорожного движения" – объект, который находится на пути участника дорожного движения и вынуждает его снизить скорость движения, совершить объезд или остановиться.

"Транспортное средство" – устройство, предназначенное для движения по дороге и для перевозки пассажиров, грузов или установленного на нем оборудования.

"Участник дорожного движения" – физическое лицо, находящееся в пределах дороги в (на) ТС или вне его, за исключением регулировщика и работника, выполняющего в установленном порядке на дороге ремонтные и другие работы.

## 1.2 Экспертизы ДТП

Экспертизы ДТП можно разделить по нескольким признакам:

– в зависимости от ведомственной принадлежности организации, исследующей ДТП, различают служебное расследование и судебную экспертизу;

– по составу участников экспертизы делят на: единоличные, комиссионные и комплексные.

*Единоличную* экспертизу проводят в сравнительно простых случаях, когда характер ДТП не вызывает разногласия в толковании отдельных его обстоятельств.

*Комиссионную* экспертизу назначают при разборе сложных происшествий с большим числом участников и транспортных средств, а также при наличии обстоятельств, которые вызывают сомнения или разногласия в их толковании. В состав комиссии входят несколько экспертов одной специальности. Члены комиссии исследуют одни и те же объекты и отвечают на одни и те же вопросы. Комиссия экспертов представляет общее заключение, согласованное со всеми ее членами. При возникновении разногласий каждый член комиссии может представить письменно свое особое мнение, обосновав его.

*Комплексную* экспертизу назначают в случаях, когда возникшие вопросы не могут быть решены специалистами одного рода, и требуются лица разных специальностей. При комплексной экспертизе в состав комиссии кроме эксперта-автотехника, могут быть включены медики, криминалисты и т.д. Комиссия исследует одни и те же объекты, и решают вопросы пограничные, общие для специалистов различных отраслей знания;

– по очередности проведения различают первичную, дополнительную и повторные экспертизы.

Проводя *первичную* экспертизу, эксперт-автотехник отвечает на конкретные вопросы, содержащиеся в постановлении дознавателя или определении суда.

*Дополнительную* экспертизу назначают при недостаточной ясности или

неполноте заключения эксперта. Дополнительное исследование разъясняет заключения, данные ранее, уточняет процесс исследования ДТП и смысл выводов. Дополнительно аргументируются выводы на поставленные ранее вопросы.

*Повторная* экспертиза может быть назначена, если имеется сомнение в квалификации эксперта, правильности проведенной экспертизы, объективности ее выводов или в достоверности исходных данных, положенных в основу заключения, а также при нарушении требований уголовно-процессуального кодекса. Необходимость в повторных экспертизах возникает также при выявлении дополнительных материалов, неизвестных при первичной экспертизе и по-новому освещающих обстоятельства дела. Повторная экспертиза чаще всего бывает комиссионной и назначается только в новом составе. В состав новой комиссии не могут быть включены эксперты, участвовавшие в первичной и дополнительной экспертизах.

*Судебная экспертиза ДТП* – это процессуальное действие, исследующее обстоятельства дела о ДТП в целях выявления фактических данных, которые могут явиться доказательством для установления истины по уголовному делу. Такие фактические данные могут иметь значение для проверки данных, полученных на основе других доказательств.

Судебная дорожно-транспортная экспертиза включает пять видов:

- экспертное исследование *обстоятельств ДТП* (преимущественно с помощью расчетных методов) или ситуалогическая экспертиза;
- экспертное исследование *технического состояния ТС* или технико-диагностическая экспертиза;
- экспертное исследование *следов на ТС*, месте происшествия, *вещной обстановки* или транспортно-трасологическая экспертиза;
- экспертное исследование *водителей ТС* и других участников движения или судебная инженерно-психофизиологическая экспертиза водителей ТС (участников движения);
- экспертное исследование *дороги, дорожных условий* на участке ДТП или судебная автодорожная экспертиза.

Целью экспертизы является научно обоснованное восстановление обстоятельств процесса происшествия (механизма) и установление объективных причин ДТП.

Судебную экспертизу ДТП проводят по поручению следователей и судов в предусмотренном законом порядке лица, имеющие специальные знания. Это, как правило, штатные сотрудники экспертных учреждений. В отдельных случаях следственные и судебные органы поручают проведение экспертизы внештатным экспертам: работникам научно-исследовательских институтов, вузов, техникумов. В основном при экспертизе ДТП необходимы специальные познания в области судебной медицины, автомобильной техники и криминалистики.

Поскольку все ДТП связаны с уголовной ответственностью виновных и их последующим наказанием, то материалы на такие ДТП передаются органам дознания и следствия, назначающим судебную экспертизу. Параллельно может проводиться служебное расследование, задачи которого обычно несколько шире.

В сложившейся практике к крупным относят происшествия, результатом которых были смертельный исход, тяжкие или менее тяжкие телесные повреждения или значительный материальный ущерб. При отсутствии телесных повреждений и смерти людей и при ущербе, не превышающем определенной суммы, проводят только служебное расследование. Материальный ущерб возмещается в административном порядке.

Криминалистический эксперт исследует различного рода следы движения предметов, возникшие в процессе ДТП (трасологическая экспертиза). По следам, оставленным на месте ДТП (следы торможения или отпечатки протекторов шин на покрытии дороги, царапины на столбах, зданиях и транспортных средствах), осколкам стекол и другим деталям эксперт-криминалист определяет модель и марку транспортного средства, направление его движения и положение на проезжей части в различные моменты времени. Целью судебной автотехнической экспертизы является установление научно обоснованной характеристики процесса ДТП во всех фазах, определение объективных причин ДТП и поведения его отдельных участников. В результате экспертизы лица, расследующие данное ДТП, должны получить возможность ответить на основной вопрос: имел ли место несчастный случай или событие произошло в результате неправильных действий его участников, пренебрегших требованиями безопасности?

Обстановку на месте ДТП эксперт-автотехник исследует, чтобы установить параметры, характеризующее движение ТС и других объектов в зоне ДТП (ширину проезжей части и обочин, коэффициент сцепления шин с дорогой и сопротивление качению, уклон дороги, радиусы закруглений). В процессе исследования определяют траектории движения транспортных средств, условия видимости и обзорности, а также другие обстоятельства, которые могли способствовать ДТП.

Эксперт-автотехник определяет, как следовало действовать участникам ДТП, чтобы выполнить технические требования ПДД, эксплуатации транспортных средств и других нормативных документов. Сопоставляя фактические действия участников в процессе ДТП с указаниями нормативных документов, эксперт определяет степень соответствия этих действий установленным требованиям.

Также он участвует в разработке мер предупредительного характера, направленных на обеспечение безопасности движения и эксплуатации автомобильного транспорта, способствует улучшению качества и сокращению сроков судебных автотехнических экспертиз.

Заключение эксперта является важнейшим средством доказывания в делах об автотранспортных преступлениях. Оно содержит доказательственную информацию, которую получают путем проведенных на основе научных данных исследований, а также фактических обстоятельств, зафиксированных в уголовном деле. Исследуя поставленные доказательства, эксперт в соответствии с поставленными перед ним задачами устанавливает другие доказательства по делу, используя при этом специальные познания. Таким образом, доказательственная информация, устанавливаемая судебной экспертизой, является результатом обобщающего познавательного процесса и носит характер вывода.

Причины ДТП обуславливаются особенностями разных видов автотехники, метеорологическими и дорожными условиями, психологией и физиологией водителя и т. д. Таким образом, экспертиза требует использования информации из самых разных областей знания: юриспруденции; криминалистики; медицины; психофизиологии; конструкции, теории и расчета транспортных средств, технологии их изготовления, обслуживания и ремонта; проектирования, строительства и эксплуатации дорог; организации и безопасности дорожного движения, одним из главных аспектов проблемы которой является снижение тяжести последствий дорожно-транспортных происшествий (ДТП). За последние годы экспертами по анализу ДТП нашли широкое практическое применение такие виды, как автотехническая, дорожная, транспортно-трассологическая, инженерно-психологическая и экономическая экспертиза по оценке морального ущерба вследствие ДТП. Для обеспечения высокого уровня качества и доказательного значения экспертиз по анализу ДТП необходимо выполнение двух моментов: процессуального (соблюдение процессуальных норм) и организационно-методического (соблюдение современного научного и методического уровней исследований).

Предметом *автотехнической экспертизы* являются фактические данные о техническом состоянии ТС, дорожной обстановке на месте происшествия, действиях участников происшествия и их возможностях, механизме ДТП, а также об обстоятельствах, способствующих совершению преступления, которые устанавливает эксперт-автотехник на основе своих специальных познаний и материалов уголовного (гражданского) дела или административного материала.

Автотехническая экспертиза как род инженерно-транспортной экспертизы подразделяется на виды и подвиды, которые различаются по предмету, объектам и частным методикам. С учетом предмета доказывания и содержания специальных познаний выделяются следующие виды АТЭ:

1. *Судебная экспертиза обстоятельств ДТП* – включает экспертное исследование дорожно-транспортной ситуации, расчет параметров движения транспортных средств, иных объектов и пешеходов процессе ДТП, а также анализ действий и возможностей водителя.



Предметом судебной экспертизы обстоятельств ДТП являются фактические данные об обстоятельствах ДТП, загруженности, техническом состоянии ТС, скорости его движения, покрытия проезжей части, его состоянии, продольном и поперечном профилях проезжей части, режиме движения ТС.

В рамках экспертизы обстоятельств ДТП решаются следующие задачи:

- определение скорости движения и других параметров ТС;
- определение остановочного и тормозного пути, а также остановочного времени ТС;
- определение удаления ТС, пешеходов и иных объектов от места ДТП в заданные моменты;
- установление технической возможности предотвращения ДТП в заданные моменты;
- определение взаимного расположения ТС в различные моменты ДТП;
- определение времени преодоления ТС определенных участков пути;
- установление момента возникновения опасности для движения, требующего для принятия экстренных мер по предотвращению ДТП, если при этом необходимы специальные познания в проведении соответствующих расчетов, моделирования, эксперимента;
- определение взаимного положения ТС и препятствия в момент, когда водитель еще имел техническую возможность предотвратить происшествие;
- определение того, как должен был действовать водитель в сложившейся ДТП с точки зрения обеспечения безопасности дорожного движения;
- какие именно действия водителя по управлению ТС, начиная с момента возникновения опасности для движения, могли предотвратить ДТП и какими именно требованиями Правил дорожного движения они регламентированы;

2. *Судебная экспертиза технического состояния ТС.* Экспертиза производится в целях установления технического состояния транспортных средств; исследования обстоятельств дорожно-транспортных происшествий (ДТП); исследования следов на транспортных средствах и месте ДТП (транспортно-трасологическая диагностика); исследования технического состояния дороги, дорожных условий на месте ДТП; исследования транспортных средств в целях определения стоимости восстановительного ремонта и остаточной стоимости; и других обстоятельств, связанных с ДТП.

В рамках судебной экспертизы решаются следующие задачи:

- установление технического состояния ТС, его отдельных узлов, механизмов, систем, агрегатов;
- установление причины возникновения неисправности, дефекта или недостатка (производственный, конструктивный или эксплуатационный недостаток) ТС;
- установление существенности недостатка (недостатков) автомобиля с целью его замены;

- установление фактов гарантийного и негарантийного недостатка или дефекта ТС;
- определение качества ремонта (кузовного, слесарного) транспортного средства, агрегатов и узлов на техническом центре;
- определение причин и времени возникновения неисправностей, возможности своевременного выявления их лицами, ответственными за техническое состояние транспортного средства, влияния этих неисправностей на возникновение и развитие дорожно-транспортного происшествия (ДТП).

3. *Судебная экспертиза следов на ТС и месте ДТП* (транспортно-трасологическая диагностика), а также технического состояния дороги, дорожных условий на месте ДТП. Трасологическая экспертиза представляет собой исследование следов, а также объектов, оставивших след или несущих на себе следы, и других материалов, имеющих отношение к событию. Это исследование проводится специалистами, для установления фактических данных, которые будут использованы в качестве доказательств.

Основными задачами *инженерно-психологической* экспертизы являются психофизиологические исследования состояний водителя или пешехода, оценка влияния состояния водителя или пешехода на их действия. Также такая экспертиза позволяет определить:

- психофизиологические характеристики водителя (пешехода) и его поведенческие свойства;
- оценить факторы, влияющие на принятие решения водителем (пешеходом) и зависящие или не зависящие от него в данном ДТП;
- исследовать этапы развития конфликтной ДТС;
- определить условия, способствовавшие восприятию конфликтной ДТС и искажавшие (или исключавшие) восприятие конфликтной ДТС.

Дорожно-транспортное происшествие очень сложное явление, которому сопутствует большое количество различных факторов, из которых лишь небольшая часть в действительности способствовала возникновению и развитию ДТП. Задача эксперта состоит в установлении этих факторов, причин их появления, степень воздействия на ход происшествия, затем все это соотносится с действиями лиц, принимавших участие в ДТП. Однако эта задача весьма сложная.

*Экспертные автотехнические исследования.*

Рассмотрим разновидности и основные цели *экспертных автотехнических исследований*.

1. Процесс торможения ТС, позволяющий определить: замедления, тормозные и остановочные пути, время торможения, скорость ТС перед торможением и при различных условиях движения.

2. Устойчивость и управляемость ТС, включая расчеты: максимальной скорости ТС по условиям буксования ведущих, потерю поперечной устой-

чивости ТС при разных уклонах различных дороги, потерю продольной устойчивости, потеря управляемости ТС.

3. Исследование маневра ТС.

4. Исследование обгона и объезда ТС.

5. Столкновения ТС, включая следующие процессов: сближения ТС, столкновения, отбрасывания после столкновения, определение места столкновения, техническую возможность предотвращения столкновения.

6. Наезд ТС на пешеходов, содержащий следующие исследования: движения ТС и пешехода перед наездом, взаимодействия ТС и пешехода при наезде, процесса отбрасывания пешехода, техническая возможность предотвратить наезд на пешехода, перемещающегося в различных направлениях при ограниченной обзорности и/или ограниченной видимости

Рассмотрим основные особенности перечисленных экспертных автотехнических исследований.

1. *Торможение.* Экспертное исследование процесса торможения ТС в большинстве случаев является исследованием экстренного (аварийного) торможения и чаще всего сводится к определению скорости автомобиля и остановочного пути. Однако иногда приходится устанавливать и такие параметры процесса торможения, как тормозной путь, замедление и время различных фаз торможения. В работе [31] подробно изложены методики экспертных исследований при торможении ТС в процессе дорожно-транспортного происшествия.

2. *Управляемость и устойчивость.* При исследовании механизма ДТП часто возникает необходимость решения вопросов, связанных с устойчивостью и управляемостью ТС.

Вопросы управляемости и устойчивости являются одним из самых сложных и до сих пор наименее разработанными [30]. В теоретических исследованиях большей частью рассматривают влияние отдельных факторов на управляемость и устойчивость автомобиля.

Управляемость – это способность автомобиля, управляемого водителем, сохранять заданное направление движения в определенной дорожно-климатической обстановке или изменять его по желанию водителя, выраженному воздействиями на рулевое колесо. Термин дорожно-климатическая обстановка представляется совокупностью свойств и состояний дорожного покрытия, условий движения и климатических условий.

Различаются два понятия устойчивости:

1) *устойчивость (курсовая)* – способность автомобиля, управляемого водителем, сохранять заданное направление прямолинейного движения при действии на него внешних возмущающих сил;

2) *устойчивость (собственная)* – способность автомобиля без участия водителя (с закрепленным или свободным рулевым управлением противостоять действию внешних и возмущающих сил).

Потеря автомобилем устойчивости выражается в опрокидывании или скольжении. Более вероятно и опасно нарушение поперечной устойчивости, возникающее вследствие действия боковых сил: центробежной силы, поперечной составляющей силы тяжести, бокового ветра, ударов о неровности дороги.

Показатели поперечной устойчивости автомобиля – максимально возможные скорость движения по окружности и угол поперечного наклона дороги (косогора). Оба показателя могут быть определены из условий поперечного скольжения колес (заноса) или опрокидывания.

При экспериментальном определении критической скорости автомобиль движется по горизонтальной площадке по окружности заданного радиуса (обычно 20–25 м), постепенно увеличивая скорость. В процессе движения колеса, внутренние по отношению к центру поворота, под действием центробежной силы разгружаются, внешние – нагружаются. Заметив начало скольжения колес или отрыва их от дороги, контролеры при помощи приборов фиксируют скорости.

Для определения критического угла косогора автомобиль устанавливают на платформе, одну сторону которой поднимают таями или домкратами. При достижении предельного состояния (начало скольжения или опрокидывания) замеряют угол наклона платформы при помощи угломерных инструментов.

3. *Маневрирование.* В целях предотвращения ДТП водитель изменяет режим движения ТС, применения различные способы: уменьшение или увеличение скорости, а также изменение направления движения.

Маневрирование ТС – это любое (сознательное) изменение режима его движения водителем. Под маневром автомобиля также понимается изменение его курсового угла и, следовательно, траектории движения при повороте водителем рулевого колеса (управляемых колес).

Правила дорожного движения обязывают водителя в случае возникновения опасности для движения принять меры к снижению скорости вплоть до остановки ТС. Однако это предписание не исключает применения маневра в различных ситуациях, когда оно не только оправдано, но и необходимо. Например, поворот дороги создает препятствие для прямолинейного движения автомобиля, и в этом случае маневр является естественным. Кроме того, по условиям движения водителю приходится совершать перестроения для поворотов, разворотов, обгона или объезда.

Для всех видов маневра необходимо знать также траекторию движения автомобиля.

Маневр выполняют на основе определенных навыков. Возможность выполнения его зависит от опыта, психофизиологических свойств водителя, скоростей движения и поворота управляемых колес, состояния дорожного покрытия и параметров ТС. При возникновении опасности водителя во из-

бежание ДТП чаще всего резко поворачивают рулевое колесо и производят маневр на грани потери устойчивости и управляемости. Движение ТС должно отвечать определенным требованиям (в первую очередь, по критериям устойчивости автомобиля).

4. *Обгон и объезд.* В транспортных потоках часто возникает необходимость объезда и обгона ТС и иных препятствий, что связано с изменением скорости и направления движения. Обгон и объезд как весьма сложные маневры требуют от водителей особенно внимательной оценки дорожной обстановки и возможного ее изменения.

Экспертная практика свидетельствует о том, что основными причинами ДТП в процессе обгона (объезда) являются несоответствие действий водителя требованиям Правил дорожного движения и ошибки в оценке дорожной обстановки и сложных условий движения [31].

Различают два вида обгона (объезда):

– обгон (объезд) с выездом на соседнюю полосу проезжей части того же направления;

– обгон (объезд) с выездом на полосу встречного движения.

Обгон (объезд) состоит из трех фаз:

– отклонение обгоняющего (объезжающего) ТС в сторону позади препятствия на некотором расстоянии (безопасная дистанция);

– движение рядом с препятствием на определенном расстоянии от него (безопасный интервал);

– возвращение в прежний ряд перед препятствием на некотором расстоянии (безопасная дистанция).

При маневрировании в первой и третьей фазах обгона (объезда) водители, как правило, поворачивают рулевое колесо плавно. Поперечные ускорения и силы, действующие на автомобиль, намного меньше допустимых, и отклонение автомобиля происходит без потери поперечной устойчивости. Значения продольного ускорения при разгоне и замедления при торможении, напротив, достаточно велики и обычно близки максимально возможным.

Безопасность обгона (объезда) обеспечивается только в том случае, если полоса дороги, на которую должно выехать обгоняющее (объезжающее) ТС, на всем протяжении, необходимом для завершения обгона (объезда), свободна, а ее ширина позволяет двигаться с высокой скоростью. Во время экспертного исследования процесса обгона (объезда) устанавливаются предельные технические параметры, обеспечивающие безопасность обгона (объезда) в данной конкретной обстановке, и определяются причины, мешавшие водителю своевременно его закончить.

При возникновении ДТП в процессе обгона (объезда) на разрешение автотехнической экспертизы органами следствия и судом обычно становятся такие вопросы:

- определить значения пути и времени, необходимые для безопасного обгона (объезда) автомобиля *В* (или другого препятствия) автомобилем *А* при скорости его движения;

- определить техническую возможность безопасного обгона (объезда) автомобилем *А* другого ТС, двигавшегося с определенной скоростью, при наличии встречного транспорта, двигавшегося с определенной скоростью и находившегося от обгоняемого (объезжающего) средства на расстоянии;

- определить техническую возможность безопасного обгона (объезда) автомобиля *В* (или другого препятствия) автомобилем *А* при определенной скорости движения ТС в процессе обгона (объезда); определить расстояние между обгоняющим и встречным ТС, которое могло обеспечить безопасный обгон (объезд) при определенной скорости движения ТС.

Успешность экспертного исследования обгона (объезда) и решение вопросов, интересующих органы следствия и суд, во многом зависит от полноты и точности исходных данных. Как правило, эксперту должны быть сообщены следующие данные:

- скорость движения транспортных средств, причастных к ДТП;

- расстояние видимости встречного ТС или другого препятствия для водителя обгоняющего (объезжающего) ТС;

- габаритные размеры препятствия и его расположение на дороге перед обгоном (объездом).

Кроме того, в протоколе осмотра места происшествия и схемы к нему должны быть отражены все следы, образованные ТС во время данного ДТП, расположение этих следов по отношению к границам проезжей части, а также их размеры и характеристики.

**5. Столкновения ТС.** Под столкновением ТС понимается происшествие, возникшее в результате взаимного контакта механических ТС в процессе их движения и повлекшее за собой гибель или телесные повреждения людей, повреждения ТС, сооружений, грузов или иной материальный ущерб.

Столкновения нередко сопровождаются опрокидыванием, пожаром, выездом за пределы дороги, наездами на препятствия или падением с возвышений (мостов, путепроводов, откосов), что помимо большого материального ущерба приводит к человеческим жертвам.

Причинами столкновений являются обстоятельства, создавшие такую дорожную обстановку, в которой водитель своевременно не обнаружил опасности столкновения и не принял необходимых мер для его предотвращения. Основные причины столкновений можно разделить на следующие группы:

- неисправности ТС, приводящие к внезапному изменению направления движения или лишаящие водителя возможности снизить скорость, остановиться либо совершить объезд препятствия;

- неблагоприятные дорожные условия, приводящие к произвольному изменению направления движения ТС или потере управляемости (скользящая проезжая часть, разные значения коэффициента сцепления под правыми и левыми колесами);

- неблагоприятная дорожная обстановка, когда в полосе движения ТС возникает препятствие, вынуждающее водителя применить резкий маневр или торможение, что приводит к потере управляемости ТС и выезду в опасном направлении;

- действия водителей, противоречащие требованиям Правил дорожного движения и создающие помеху (например, при проезде перекрестков, обгоне, объезде);

- неправильные приемы управления, приводящие к потере управляемости ТС (резкое торможение при совершении поворота или на скользкой дороге, крутой поворот рулевого колеса при выезде из колеи);

- прочие (неправильная организация движения, неудовлетворительная видимость дорожных знаков или их отсутствие, что приводит к неправильной оценке водителем дорожной обстановке).

Основной задачей автотехнической экспертизы при исследовании этого вида ДТП является установление механизма столкновения. На основании исследования представленных на экспертизу материалов эксперт устанавливает причинные связи между событиями, выявляет противоречия между отдельными данными и восполняет недостающие звенья в общей совокупности обстоятельств на всех трех стадиях механизма столкновения – в процессе сближения ТС, взаимодействия при ударе и отбрасывания после столкновения.

Наиболее полное представление о механизме столкновения ТС можно получить в результате проведения комплексной автотехнической и транспортно-трасологической экспертизы.

При исследовании механизма столкновения в процессе сближения ТС эксперт устанавливает либо нарушение устойчивости, либо потерю управляемости перед столкновением и причины такого нарушения, определяет скорость ТС перед происшествием и в момент столкновения, устанавливает расположение ТС в определенные моменты времени, полосу, направление движения, угол встречи при столкновении. Исследуя процесс взаимодействия ТС, эксперт устанавливает взаимное расположение их в момент удара, определяет направление удара и его воздействие на исследуемое движение. При исследовании процесса отбрасывания ТС после столкновения эксперт устанавливает место столкновения по оставшимся следам и расположению ТС после происшествия, определяет скорости движения их после удара, направление отбрасывания.

Установление экспертом механизма столкновения и техническая оценка действий участников происшествия позволяют следственным органам и

суду решить вопрос о причине происшествия и обстоятельствах, способствовавших его возникновению.

Методика экспертного исследования при установлении механизма столкновения зависит от вида столкновения. По основным классификационным признакам, определяющим механизм столкновения, все столкновения ТС можно разделить на следующие группы:

- по углу между направлениями движения ТС – продольные (при движении параллельными или близкими параллельному курсами) и перекрестные столкновения. Продольные столкновения подразделяют на встречные и попутные;

- по характеру взаимодействия на участке контакта при ударе – блокирующие (при полном гашении относительной скорости в момент удара), скользящие и касательные столкновения.

Механизм столкновения ТС – это комплекс связанных объективными закономерностями обстоятельств, определяющих процесс сближения ТС перед столкновением, и взаимодействие в процессе удара и последующее движение до остановки. Анализ данных об обстоятельствах происшествия позволяет эксперту установить взаимосвязь между отдельными событиями, восполнить недостающие звенья и определить техническую причину происшествия. Формальное решение экспертом вопросов по отдельным разрозненным данным, без технической оценки соответствия их друг другу и установленным объективным данным, без вскрытия и объяснения противоречий между ними может привести к неправильным выводам.

При исследовании механизма происшествия признаки, непосредственно позволяющие установить то или иное обстоятельство, могут отсутствовать. Во многих случаях оно может быть установлено исходя из данных о других обстоятельствах происшествия, путем проведения экспертного исследования на основе закономерностей, связывающих все обстоятельства механизма происшествия в единую совокупность.

В процессе столкновения ТС контакт между ними возникает на обширных участках, причем в него вступают различные части, отчего силы взаимодействия появляются в разных местах. Направление и величина этих сил зависит от конструкции контактирующих частей (их формы, прочности, жесткости, характера деформации), поэтому силы взаимодействия различны в разных точках контакта. Поскольку деформации ТС при столкновении могут быть весьма значительными по глубине, силы взаимодействия переменны по величине и направлению.

Механизм столкновения ТС можно разделить на три стадии: сближение ТС перед столкновением, взаимодействие при ударе и отбрасывание (движение после столкновения).

Первая стадия механизма столкновения – процесс сближения – начинается с момента возникновения опасности для движения, когда для предот-



вращения происшествия (или уменьшения тяжести последствий) требуется немедленное принятие водителями необходимых мер, заканчивается в момент первоначального контакта ТС. На этой стадии обстоятельства происшествия в наибольшей степени определяются действиями его участников. На последующих стадиях события обычно развиваются под действием непреодолимых сил, возникающих в соответствии с законами механики. Поэтому для решения вопросов связанных с оценкой действий участников происшествия с точки зрения соответствия их требованиям безопасности движения, особое значение имеет установление обстоятельств происшествия на первой его стадии (скорость и направление движения ТС перед происшествием, их расположение по ширине проезжей части).

Некоторые обстоятельства происшествия на первой стадии не могут быть установлены непосредственно на месте или путем допроса свидетелей. Иногда их можно установить путем экспертного исследования механизма столкновения на последующих стадиях.

Вторая стадия механизма столкновения – взаимодействие между ТС – начинается с момента первоначального контакта и заканчивается в момент, когда воздействие одного ТС на другое прекращается и они начинают свободное движение.

Взаимодействие ТС при столкновении зависит от вида столкновения, определяемого характером удара, который может быть блокирующим и скользящим. При блокирующем ударе ТС как бы сцепляются отдельными участками, и проскальзывание между ними отсутствует. При скользящем ударе контактирующие участки смещаются относительно друг друга, так как скорости ТС уравниваются.

Третья стадия механизма столкновения – процесс отбрасывания (движение после столкновения) – начинается с момента прекращения взаимодействия между ТС и начала их свободного движения, а заканчивается в момент завершения движения под воздействием сил сопротивления.

Механизм столкновения на этой стадии определяют по результатам воздействия сил удара на ТС – отбрасыванию к развороту ТС, отдалению и расщеплению частей, осколков, разбрызгиванию жидкости. Поэтому наиболее полные данные, необходимые для установления механизма столкновения, могут быть получены при осмотре и исследовании места происшествия.

6. *Наезд ТС на пешеходов.* Под наездом на пешехода понимают такой контакт ТС с находившимся вне его человеком, следствием которого явилась смерть или телесные повреждения.

Под технической возможностью у водителя предотвратить наезд на пешехода следует понимать возможность избежать наезда путем изменения режима движения ТС, в частности путем торможения или маневра. Водитель располагал технической возможностью предотвратить наезд на пешехода путем торможения, если в данной дорожной обстановке мог остано-

виться или снизить скорость настолько, что пешеход мог выйти за пределы полосы движения ТС.

Вопрос о наличии у водителя технической возможности предотвратить ДТП путем маневра в категорической форме решается далеко не во всех случаях, так как эта возможность в значительной степени зависит от субъективных качеств водителя.

Основные причины возникновения наездов на пешеходов можно разделить на следующие группы:

- противоречащие требованиям Правил дорожного движения действия пешеходов, в результате которых водители лишены технической возможности предотвратить наезд (например, движение по полосе следования ТС на близком расстоянии от него, переход дороги при запрещающем сигнале светофора или в местах, где переход запрещен);

- противоречащие требованиям Правил дорожного движения действия водителей, когда пешеходы пользуются преимущественным правом на движение (например, данные ТС при запрещающем сигнале светофора, выезд с большой скоростью из дворов, выполнение правого поворота на перекрестках или движение по нерегулируемому пешеходному переходу при наличии на нем пешеходов);

- неправильные, не соответствующие дорожным условиям приемы управления, применяемые водителями, приводящие к потере управления ТС и произвольному выезду на путь движения пешехода (резкое торможение, резкий поворот рулевого колеса, слишком большая скорость движения);

- неблагоприятная дорожная обстановка, созданная другими участниками движения, при которой водитель вынужден применить приемы управления, вызывающие потерю контроля за движением ТС и произвольный выезд на путь следования пешехода;

- неисправности ТС, приводящие к внезапному отклонению их от направления движения или лишаящие водителя возможности своевременно снизить скорость, остановиться или совершить маневр для предотвращения наезда.

При экспертных исследованиях необходимо использовать устройства, ускоряющие численные расчеты и повышающие их точность, а также моделирование, которое исключает на определенных этапах исследования личное участие эксперта в расчетах. Автоматизация освобождает его от большого объема операций, часть которых имеет вспомогательный характер. В результате повышается производительность труда, сокращаются сроки проведения экспертизы, и повышается ее качество.

Взаимосвязь элементов комплексных систем для моделирования и анализа дорожно-транспортных происшествий, обуславливается объемом и качеством обрабатываемой информации, что в свою очередь определяет степень адекватности модели.

Необходимо отметить, что при отсутствии следов торможения ТС современная практика моделирования обладает как минимум двумя “узкими местами”, влияющими на итоговую адекватность результатов экспертизы [26]: не соответствующие ситуации и реальному техническому состоянию «нормированные» значения тормозных характеристик ТС; определение момента начала возникновения опасности для движения.

Подробная справочно-нормативная информация, которая может быть использована в практической работе экспертов-автотехников при решении широкого круга вопросов по различным категориям ДТП представлена в работе [35].

Некоторые расчетные зависимости, применяющиеся при экспертных исследованиях механизма и обстоятельств ДТП представлены в таблице 1.1 [26].

Таблица 1.1 – Основные расчетные зависимости

Определяемый параметр	Расчетная формула (зависимость)	Обозначения, применяемые в формуле (зависимости)
1	2	3
<p>Полный остановочный путь, м</p>	$S_0 = (t_1 + t_2 + t_3) \frac{v_a}{3,6} + \frac{K_3 v_a}{254\phi}$ <p>а при известной длине следов юза</p> $S_0 = (t_1 + t_2 + t_3) \frac{v_a}{3,6} + s_{ю}$	<p><math>t_1</math> – время реакции водителя, с;  <math>t_2</math> – время срабатывания тормозного механизма, с;  <math>t_3</math> – время нарастания замедления до максимального значения, с;  <math>v_a</math> – скорость автомобиля, км/ч;  <math>K_3</math> – коэффициент эффективности торможения;  <math>\phi</math> – коэффициент сцепления шин с дорогой;  <math>s_{ю}</math> – длина пути юза, м</p>
<p>Скорость автомобиля перед торможением с учетом юза, км/ч</p>	$v_a = 1,8 t_3 j + \sqrt{25,92 j s_{ю}}$	<p><math>t_3</math> – время нарастания замедления, с;  <math>j</math> – замедление ТС, м/с<sup>2</sup></p>
<p>Скорость автомобиля перед торможением на крутом подъеме со значительным сопротивлением движению, км/ч</p>	$v_a = 35,3 \psi (t'_1 + t_2 + t_3) + 1,8 j t_3 + \sqrt{25,92 j s_{ю}}$	<p><math>\psi</math> – коэффициент сопротивления движению;  <math>t'_1</math> – время переноса ноги с педали газа на педаль тормоза, с;  <math>t_2</math> – время срабатывания тормозного механизма, с;  <math>t_3</math> – время нарастания замедления до максимального значения, с</p>

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3
<p>Скорость автомобиля перед торможением для участков торможения с разными сцепными свойствами, км/ч</p>	$v_a = 1,8 j t_3 + \sqrt{25,92 \sum_{i=1}^n s_i}$	<p><math>j_i</math> – установившееся замедление на каждом участке торможения, <math>i = 1, n</math>, м/с<sup>2</sup>;  <math>s_i</math> – длина каждого участка, <math>i = 1, n</math>, м;  <math>t_3</math> – время нарастания замедления до максимального значения, с</p>
<p>Скорость ТС перед торможением движением накатом после прекращения торможения, км/ч</p>	$v_a = 1,8 j_{\text{уст}} (t_3 + t_{\text{от}}) + \sqrt{25,92 (j_{\text{уст}} s_{\text{ю}} + j_{\text{к}} s_{\text{к}})}$	<p><math>t_{\text{от}}</math> – время оттормаживания, с;  <math>j_{\text{к}}</math> – замедление на участке свободного качения, м/с<sup>2</sup>;  <math>j_{\text{уст}}</math> – установившееся замедление, м/с<sup>2</sup>;  <math>s_{\text{к}}</math> – расстояние, на которое продвинулся автомобиль до полной остановки, не оставляя следа юза, м</p>
<p>Расчет скорости перед торможением по приближенной формуле, км/ч</p>	$v_a = 1,8 j (t_3 + t_{\text{от}}) + \sqrt{25,92 (j s_{\text{ю}} + j_{\text{к}} s_{\text{к}})}$	<p><math>s_{\text{ю}}</math> – длина пути юза, м;  <math>s_{\text{к}}</math> – расстояние, на которое продвинулся автомобиль до полной остановки, не оставляя следа юза, м</p>
<p>Расчет скорости перед торможением по приближенной формуле (при наезде на пешехода), км/ч</p>	$v_a = 1,8 j (t_3 + t_{\text{от}}) + \sqrt{25,92 (j s_{\text{ю}} + v_{\text{н}}^2)}$	<p><math>v_{\text{н}}</math> – скорость в момент наезда, км/ч</p>
<p>Предельная скорость, при которой опрокидывание уже не исключается, км/ч</p>	$v_a = 3,6 \eta_{\text{к}} \sqrt{\frac{B + 2h_g \text{tg} \beta}{2h_g - B \text{tg} \beta} g R}$	<p><math>B</math> – колея автомобиля;  <math>h_g</math> – высота центра масс, м;  <math>\beta</math> – угол поперечного уклона;  <math>R</math> – радиус закругления поворота, м;  <math>g</math> – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  <math>\eta_{\text{к}}</math> – коэффициент предельного поперечного крена поддресоренной массы автомобиля</p>

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3
То же, но при поперечном уклоне дороги направленном в сторону противоположную центру закругления дороги, км/ч	$v_a = 3,6\eta_{\kappa} \sqrt{\frac{B - 2h_g \operatorname{tg} \beta}{2h_g + B \operatorname{tg} \beta}} gR$	См. выше
То же, но при движении с ускорением по повороту дороги постоянного радиуса имеющего поперечный уклон, км/ч	$v_{\text{он}} = 3,6\eta_{\kappa} \sqrt{\frac{B \pm 2h_g \operatorname{tg} \beta}{2h_g \mp B \operatorname{tg} \beta}} gR - bj_a$	$j_{\kappa}$ – ускорение поступательного движения, м/с <sup>2</sup> ; $b$ – расстояние по горизонтали от центра масс до оси задних колес, м
Расстояние необходимое для объезда препятствия, м	$S_{\text{об}} = (t_1 + t_p) \frac{v_a}{3,6} + \sqrt{\frac{v_a Ly_{\kappa}}{3,6\omega}}$	$\omega_{\kappa}$ – величина бокового смещения, м; $t_p$ – время срабатывания рулевого управления (0,1–0,4 с);
Минимально допустимая дистанция, м	$D = \Delta + \frac{j_a - j_b}{25,92 j_a j_b} + [t_1 + (t_{26} + t_{2a}) + 0,5(t_{36} + t_{3a})] \frac{v_a}{3,6}$	$t_{2a}$ и $t_{26}$ – время срабатывания тормозного механизма автомобиля А и Б, с; $t_{3a}$ и $t_{36}$ – время нарастания замедления до максимального значения автомобиля А и Б, с; $\Delta$ – расстояние между автомобилями к моменту их остановки, м
Предельно допустимая дистанция при поточном движении, м	$D_{\text{min}} = (t_1 + t_2 + 0,5t_3) \frac{v}{3,6}$	См. выше
Необходимое расстояние между задним и передним автомобилем в момент торможения переднего для избежания наезда, м	$D_5 = (t_1 + t_2 + 0,5t_3) \frac{v_a}{3,6} + \frac{v_6^2}{25,92 j} - \frac{v_a^2}{25,92 j}$	См. выше
Минимальный интервал, м	$U = 0,3 + 0,05(v_a + v_6)$	См. выше

Необходимо отметить, что независимо от способа выполнения экспертизы и от применяемых при этом технических средств, процессуальная роль эксперта во всех случаях остается неизменной. Как при автоматизации экспертизы, так и без нее эксперт дает заключение от своего имени, подписывает его и несет за него ответственность по закону.

### 1.3 Факторы, влияющие на безопасность дорожного движения

Дорожное движение характеризуется сложным комплексом взаимодействия водителя, автомобиля, дороги и среды (ВАДС). Любой отказ или отклонение от нормы в любом звене этой системы, оказывающие влияние на безопасность движения транспортного средства, могут привести к ДТП, если водителем не будут приняты своевременные и адекватные меры. Ниже приведем некоторые положения по каждому из перечисленных звеньев названной системы ВАДС:

1. *Звено системы ВАДС – водитель.* Резкое и внезапное для водителя изменение в его психофизиологическом состоянии может привести к тому, что он потеряет контроль над управлением ТС. Например, при отсутствии следов юза колес ТС на месте происшествия решение вопросов оценки дорожной ситуации и определение момента возникновения опасной ситуации (опасности для движения) будет основываться лишь на субъективных показаниях участников ДТП, если они предоставят дознавателю и суду такую информацию.

2. *Звено системы ВАДС – автомобиль.* Источником возникновения опасной ситуации (опасности для движения) в этом звене системы ВАДС может оказаться неисправность, например, поломка в рулевом управлении, тормозной системе, в ходовой части ТС и пр.

3. *Звено системы ВАДС – дорога.* Повреждения дорожного покрытия, ремонтные работы на дороге, не обозначенные дорожными знаками и не освещенные в темное время суток, участки с резким изменением сцепных качеств дорожного покрытия (обледенения, наносы грязи) могут создавать опасность для движения ТС, если водителем не будут приняты своевременные меры к снижению скорости вплоть до остановки в случае необходимости. Результатом проявления таких опасностей на дороге будет потеря ТС поперечной устойчивости, его занос и изменение направления движения с выездом на соседние полосы проезжей части, на полосу встречного движения, за пределы проезжей части с последующим опрокидыванием. Положение ТС относительно опасных мест на дороге в такой момент должно быть установлено следственным экспериментом.

4. *Звено системы ВАДС – среда.* К среде, в которой осуществляется движение ТС, следует отнести все, что движется по дороге в попутном и встречном направлениях, пересекает ее, а также все то, что остановилось, неподвижно на дороге. Сюда же следует отнести и природные явления, внезапно меняющиеся условия дорожного движения и создающие опасность для движения ТС.

Основной задачей анализа является выявление комплекса причин, влияющих на аварийность движения, их группировка и систематизация. С этой

целью были построены зависимости аварийности движения в зависимости от следующих факторов (рисунок 1.1):

- времени происшествия в течение суток;
- времени происшествия для различных месяцев в течение года;
- места происшествия;
- вида аварий;
- возраста водителя;
- стажа вождения при фиксированном возрасте;
- степени усталости водителя (количества часов за рулем);
- вида нарушения требований Правил дорожного движения.



Рисунок 1.1 – Факторы, определяющие уровень безопасности движения (в рамках системы ВАДС)

Основные причины ДТП группируются по следующим направлениям: причины, не зависящие от психофизических свойств водителя (состояние дорог); причины, зависящие от этих свойств (возраст водителя, стаж вождения, усталость водителя); причины, связанные с водителем косвенно (погодные условия, направления потоков движения автотранспорта и др.).

Например, на основании анализа данных ДТП для г. Гомеля за 2012 и 2013 гг. (рисунок 1.2) можно выделить самый продолжительный и высокий максимум *погибших* в период времени с 18.00 до 22.00 ч. Это время совпадает со временем наибольшей интенсивности движения транспортных средств и пешеходов и, кроме того, в вечерние часы притупляется внимательность вследствие утомления [27]. Резкие различия в большем количестве раненых и погибших в период с 14.00 до 16.00 ч. возможно связано с лучшей видимостью дороги и большей вероятностью успеть среагировать, снизив скорость и уменьшив тяжесть последствий.

Большая часть всех происшествий приходится на сумерки и темное время суток (около 60%). Этот же период отмечен также самой высокой тяжестью последствий (таблица 1.2).

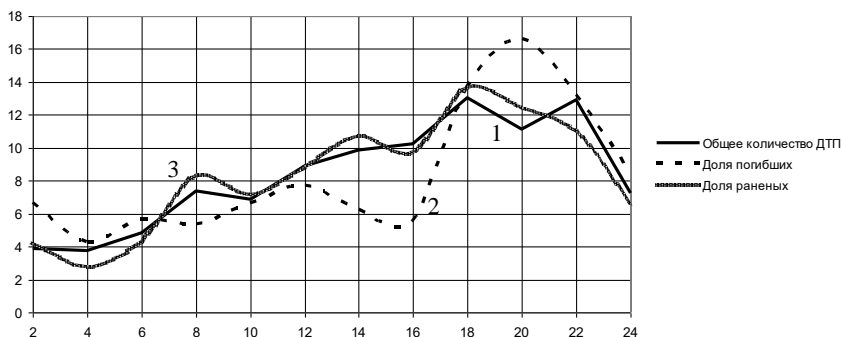


Рисунок 1.2 – Зависимость изменения ДТП по часам суток для г. Гомеля за 2012 и 2013 гг.: 1- число ДТП; 2- число погибших; 3- число раненых

Таблица 1.2 – Статистические данные ДТП по часам суток

Время ДТП	Обобщенные данные		Погибло		Ранено	
	Общее число пострадавших	%	Количество погибших	%	Количество раненых	%
01.00-03.00	45	3,9	12	6,7	33	4,3
03.00-05.00	19	3,7	3	4,3	16	2,8
05.00-07.00	35	4,8	10	5,7	25	4,3
07.00-09.00	67	7,4	8	5,3	59	8,4
09.00-11.00	59	6,8	9	6,6	50	7,2
11.00-13.00	68	8,9	13	7,7	55	8,8
13.00-15.00	81	9,8	6	6,3	75	10,7
15.00-17.00	63	10,3	7	5,6	56	9,7
17.00-19.00	116	13,0	22	13,7	94	13,7
19.00-21.00	123	11,1	25	16,6	98	12,5
21.00-23.00	79	12,9	15	13,2	64	11,0
23.00-01.00	54	7,3	17	8,4	37	6,6
Всего	809	100	147	100	662	100



Отсутствие наружного освещения или его отказ, вследствие неисправности (таблица 1.3), привело к 25% всех ДТП.

*Таблица 1.3 – Статистика ДТП по освещенности*

Освещенность	2012 год		2013 год	
	Количество ДТП	%	Количество ДТП	%
Светлое время суток	407	55,37	382	57,36
Темное время суток при включенном наружном освещении	130	17,69	121	18,17
Темное время суток, наружное освещение не включено или неисправно	34	4,63	44	6,61
В темное время суток при отсутствии наружного освещения	164	22,31	119	17,87

Исследование пострадавших в ДТП от возрастного и полового фактора для г. Гомеля за 2012 и 2013 гг. (таблица 1.4) позволяет сделать следующие выводы:

– самый “опасный” возраст для мужчин с 20 до 29 лет (29%), причем данный вывод коррелирует с мировой статистикой; причины во многом связаны с несоблюдением приоритета проезда пересечений дорог, несоответствие скорости и манеры вождения в дорожной обстановке, управления автомобилем в состоянии алкогольного опьянения;

– для женщин-водителей не наблюдается такого яркого всплеска пострадавших в возрасте от 20 до 29 лет, как для мужчин (19,8%);

– “женские” аварии в основном связаны с несоблюдением дистанции между транспортными средствами, выездом на встречную полосу и нарушением правил проезда перекрестков, также довольно популярен у женщин – удар другого авто при движении задним ходом.

*Таблица 1.4 – Статистика пострадавших в ДТП от возрастного и полового фактора*

Возраст	2012 год		2013 год	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины
0 до 9 лет	10	8	23	20
10 до 19 лет	70	38	68	36
20 до 29 лет	328	89	311	67
30 до 39 лет	254	74	269	55
40 до 49 лет	188	52	188	52
50 до 59 лет	184	61	162	54
60 до 69 лет	67	44	60	31
старше 70 лет	26	31	20	24
Всего	1127	397	1101	339

Основной вывод по статистике аварийности для проезжих частей различной ширины связан с тем фактом, что на дорогах с широкими обочинами аварий происходит меньше, чем на дорогах с узкими.

Исходя из анализа распределения количества ДТП за 2011 и 2012 гг. по вине водителей маршрутных транспортных средств [28] по месяцам наибольшее количество ДТП приходится на осенние и зимние месяцы, для летних месяцев (март (3), апрель (4), июнь (6)) наблюдается снижение (рисунок 1.3). В связи с вышеизложенным актуально проводить соответствующие инструктажи с водителями транспортных маршрутных средств накануне неблагоприятных периодов.

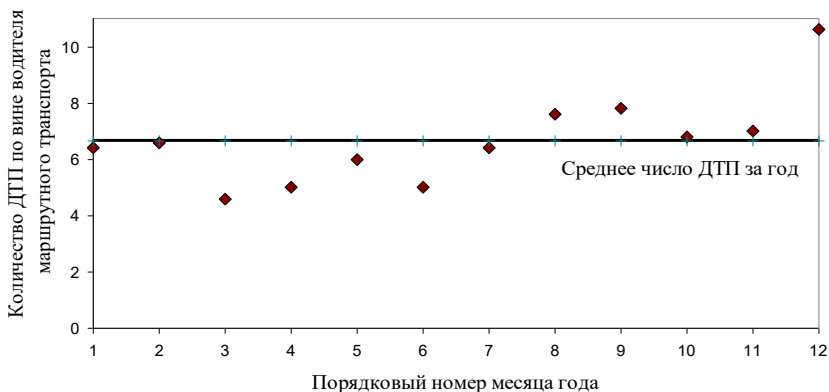


Рисунок 1.3 – Распределение количества ДТП с участием городского маршрутного транспорта по месяцам года

На основании результатов учета ДТП по вине водителей автобусов для РАУП «Гомельоблавтотранс» за 2008-2012 гг. был выполнен корреляционный анализ. Результаты анализа зависимости между общим стажем вождения транспортных средств и стажем работы на маршрутном транспортном предприятии (рисунок 1.4), указывают на следующие выводы:

- наибольшее число ДТП происходит в первые 2 года работы (это указывает на недостатки в подготовке и необходимость совершенствования учебно-практической базы водителей маршрутных транспортных средств, связанное с габаритами сочлененных автобусов, спецификой их управления и т. д.);

- наблюдается резкое повышение числа ДТП водителей с большим стажем работы (более 35 лет) в возрасте после 55 лет.

На основании результатов однофакторного дисперсионного анализа статистически подтвердилась гипотеза о увеличении числа аварий после 3-х часов работы в сравнении с таким же периодом начала работы ( $p = 0,015$ ) [28]. Поэтому обоснованным видится решение проводить эффективные мероприятия изучения и снижения нервно-эмоциональной нагрузки водителей [29].

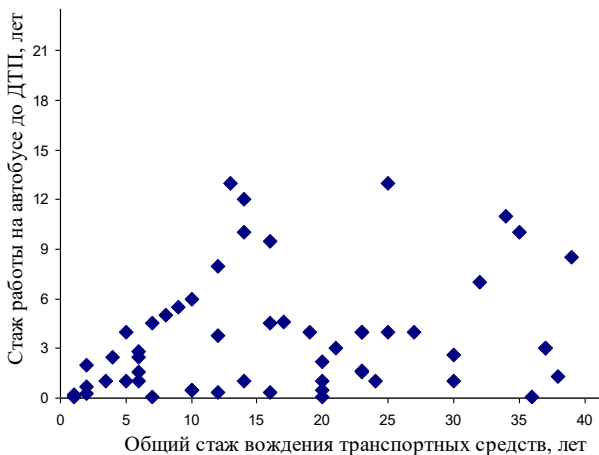


Рисунок 1.4 – Корреляционное поле между общим стажем и стажем работы на маршрутном транспортном предприятии до совершения ДТП

Наиболее серьезными упущениями, негативно влияющими на пополнение исходных данных для экспертизы ДТП и в конечном итоге на результаты расследования, являются: производство неквалифицированных осмотров мест ДТП; отсутствие современной криминалистической и другой техники; недостаточное описание следов, вещественных доказательств и повреждений на дорожном покрытии.

Неполнота и плохой сбор исходных данных порождает проведение дополнительных, либо повторных экспертиз, что может приводить к нарушению процессуальных сроков и обоснованным жалобам потерпевших лиц.

Среди всего многообразия факторов, воздействующих на механизм ДТП, существуют некоторые, которые являются наиболее существенными и, фактически, определяющими причины происшествия (например, скорость передвижения пешехода, коэффициент сцепления шин с проезжей частью, параметр замедления ТС, марки автомобилей и др.) Интерес к данным факторам состоит в том, что они являются константами, а некоторые из них определены и внесены в соответствующие справочные таблицы.

К числу проблем, требующих дальнейшего совершенствования программами анализа и реконструкции ДТП, можно отнести следующие:

- психологические особенности, физическое состояние водителя;
- характеристики транспортного потока, техническое состояние, габариты и информативность ТС;
- свойства дорожного покрытия, освещение, окружающий ландшафт;
- метеорологические факторы (температура, осадки, дальность видимости).

## **1.4 Анализ существующего программного обеспечения, используемого при производстве автотехнических экспертиз**

Современные программные комплексы, используемые при производстве автотехнических экспертиз, являются мощным инструментом эксперта в исследованиях при анализе ДТП.

Один из способов классификации методов анализа и реконструкции ДТП можно представить следующим образом:

– вид решаемой задачи:

- визуализация моделируемого процесса или его частей;
- математический анализ: ситуации, характеристик движения объектов, перемещений, деформаций и усилий, работы конструкций и узлов ТС, специализированная обработка информации (точек измерений с GPS приемника, растровых изображений);

– адекватность результата реконструкции реальному процессу:

- полностью адекватные;
- оценочные (с жесткими ограничениями, с изменяемыми данными)

– по используемому математическому аппарату:

- аналитические;
- комбинированные;
- векторная алгебра (кинетикомассовый расчет);
- метод конечных элементов

– по уровню подготовки специалиста:

- доступный для большинства инженеров;
- доступное для специально подготовленных специалистов;
- используемое группой ученых.

1. CARAT-3 (Computer Assisted Reconstruction of Accidents in Traffic) – компьютерная программа, с помощью которой можно выполнять имеющие место в работе эксперта-автотехника расчеты по анализу и реконструкции дорожно-транспортных происшествий (ДТП).

Программа позволяет выполнить следующее:

– моделировать движение транспортных средств и других объектов в динамическом и кинематическом режимах, вести анализ столкновений;

– применять интегрированную графическую программу для создания и сохранения собственных графических изображений (схем ДТП, рисунков, диаграмм), использовать фотоснимки и отсканированные иллюстрации, трансформировать в чертеж результаты измерений на месте ДТП;

– использовать интегрированную базу технических данных ТС и их изображений (проекций), а также изображений других объектов;

– представлять результаты моделирования в виде отдельного файла данных, динамических таблиц и диаграмм, двух- и трехмерной анимации.

Динамический режим CARAT-3 рассматривает реальное движение ТС и других объектов с учетом действия внешних сил и управляющих воздействий. При этом управляющими воздействиями могут быть:

- угол поворота рулевого колеса;
- сила нажатия на тормозную педаль;
- степень нажатия педали акселератора как функции времени;
- степень блокировки колес (например, защемление колеса после столкновения);
- смещение колес в продольном и поперечном направлениях и угол поворота колес (например, из-за деформированной подвески);
- изменение несущей способности шин (например, при изменении давления воздуха).

Кинематический режим рассматривает движение с учетом лишь кинематических (известных либо заданных) параметров, что, по существу, является основным методом в практике автотехнической экспертизы. В программе есть возможность задать расчет по следующим типам кинематического анализа: движение с линейно изменяющимся во времени ускорением; движение с постоянным ускорением; движение с постоянной скоростью; фаза мгновенного изменения скорости; фаза покоя.

В программе CARAT-3 можно рассматривать четыре типа столкновений (рисунок 1.5):

- два типа расчета развития ДТП (столкновение без проскальзывания в контакте и с учетом проскальзывания);
- два типа расчета ретроспективы (расчеты основаны на законе сохранения количества движения и на основе сохранения энергии).

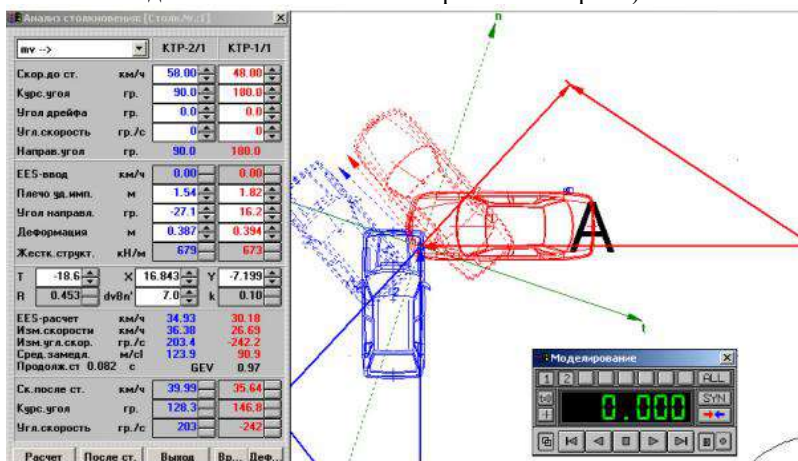


Рисунок 1.5 – Пример компьютерного моделирования столкновения в программе CARAT-3

Для анализа столкновений предусмотрено окно, где представлены практически все важнейшие начальные, контрольные и конечные параметры. В программе заложена связь между основными характеризующими соударение параметрами, поэтому в окне анализа столкновений можно контролировать корректность производимого расчета.

Результаты моделирования могут быть представлены в виде (рисунок 1.6): двух- либо трехмерной анимации; фрагментных изображений; таблиц данных; диаграмм.

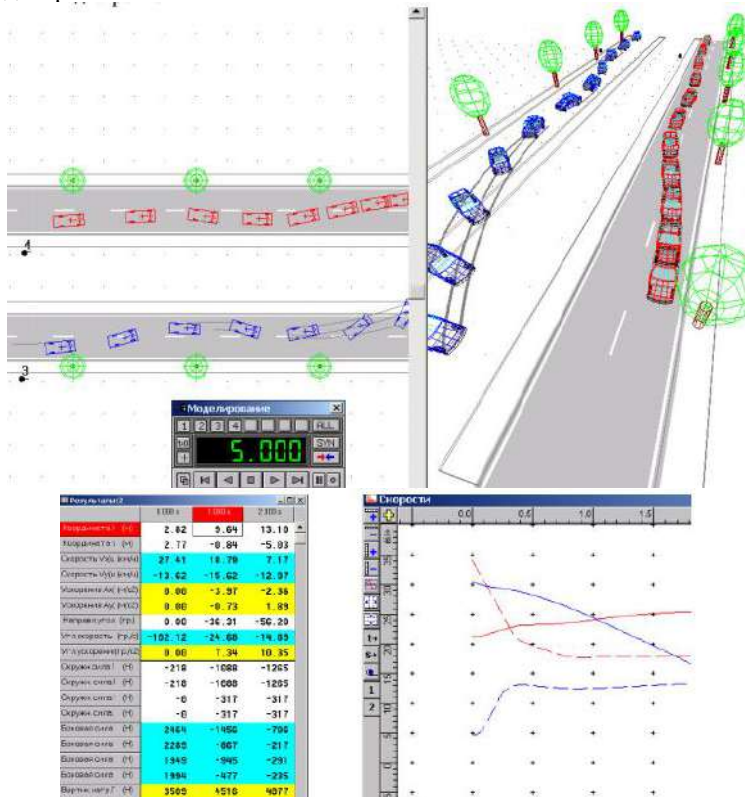


Рисунок 1.6 – Пример результатов моделирования в программе SARAT-3

При этом, создавая трехмерную анимацию, имеется возможность рассмотреть объекты из любой точки, в том числе сделать изображение динамическим – таким образом могут решаться, например, задачи по определению видимости с места водителя в процессе движения АТС. На рисунке 1.7 представлена визуализация процесса столкновения автомобиля с оградительным барьером (положения зафиксированы в момент соударения, через 0,7 с и через 2,0 с): слева – вид с места водителя.

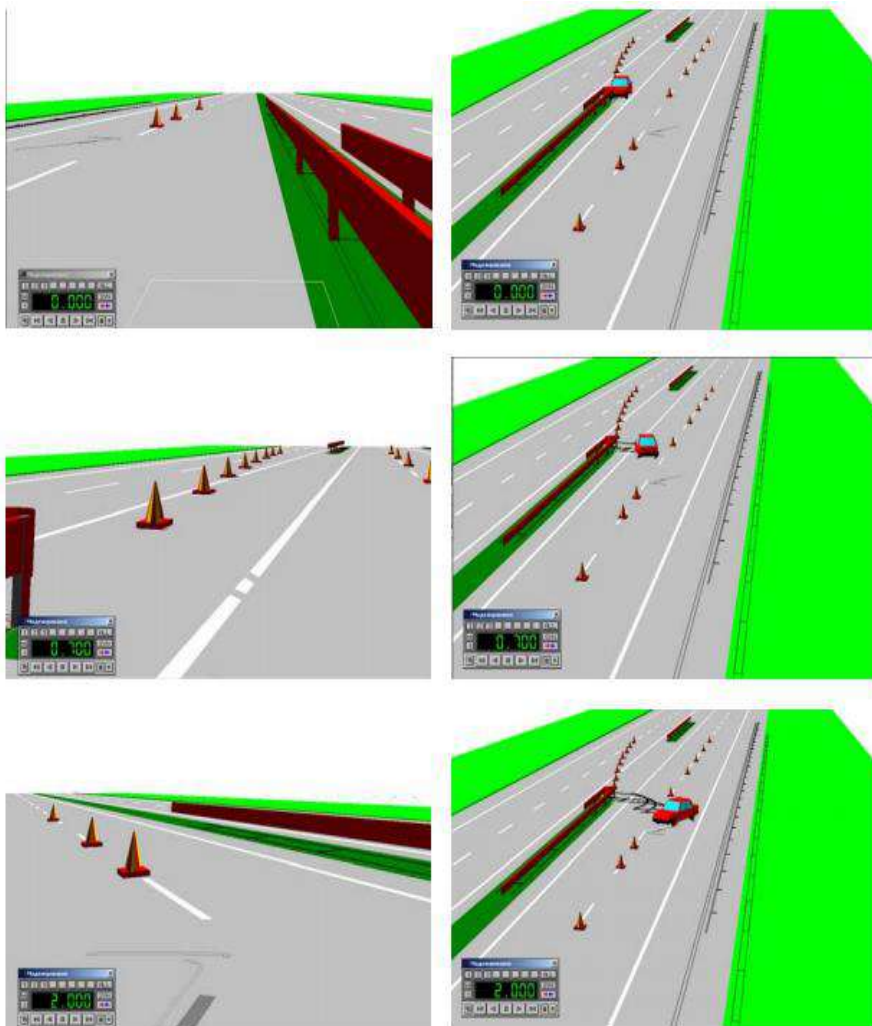


Рисунок 1.7 – Визуализация процесса столкновения автомобиля с оградительным барьером в программе CARAT-3

*Объектами моделирования* являются автотранспортные средства, препятствия и поверхности трения.

В программе имеется возможность задавать следующие параметры ТС:

– собственный вес и геометрические параметры (эти параметры можно выбрать из базы данных);

- нагрузку и место ее локализации;
- параметры сопротивления качения и воздушного потока;
- параметры рулевого управления;
- вертикальную и угловую жесткость подвесок;
- параметры двигателя и привода автомобиля;
- тормозной системы;
- зависимость коэффициента сцепления от скорости для каждого из колес.

Препятствия определяются через их геометрическую форму, вес, момент инерции, а также признак подвижности (фиксированные либо подвижные). Поверхности трения задаются через их геометрическую форму и коэффициент сцепления. Для дорожной поверхности имеется возможность задания продольного и поперечного уклонов. Пешехода можно представить подвижным объектом с соответствующими геометрическими и массовыми параметрами.

Важным элементом программы является интегрированная база данных графических элементов – проекций автотранспортных средств, людей, животных и т. д., использование которой позволяет как существенно улучшить графическое оформление, так и повысить точность производимого моделирования.

2. PC-Crash – это программа моделирования ДТП, симуляции деформации транспортных средств и телесных повреждений людей (пешеходов, водителей и пассажиров). В главе 5 более подробно рассмотрен инструментарий данной компьютерной программы.

PC-Crash включает несколько моделей расчета: импульсно-толчкообразную модель аварии, модель удара на основе жесткости, кинетическую модель для реалистичной имитации траектории движения; простую кинематическую модель для изучения времени и дистанции.

Результаты моделирования программы могут быть рассмотрены в масштабе и вертикальной проекции, 3D перспективе, а также могут быть выведены на экран в виде диаграмм и таблиц расчетных значений.

В основе расчетов используется база данных транспортных средств "Specs". Это международная признанная база данных, которая была разработана Департаментом транспорта Канады. Категории пользователей лицензий PC-Crash: экспертные группы, полицейские участки, страховые компании, автомобильная промышленность, университеты и научно-исследовательские институты.

Пакет PC-Crash предназначен для динамического моделирования движения ТС и реконструкции дорожно-транспортных ситуаций. Он позволяет воссоздавать движение не только одиночного ТС, но и автопоездов. Моделирование возможно в различных дорожных условиях: при наличии участков с разными коэффициентами сцепления дорожного покрытия и уклонами



поверхности, а также с учетом сопротивления воздуха (ветровой нагрузки). Важным достоинством программы является возможность определения скоростей движения ТС перед столкновением (на основании моделирования механизма столкновения) по известным исходным данным: месту столкновения, взаимному положению ТС в момент столкновения, конечным положениям после столкновения и т. п. При моделировании движения ТС учитываются, в частности, следующие их параметры: техническое состояние, загрузка, особенности конструкции, модель шин каждого колеса, параметры работы подвески, распределение нагрузки в ТС, время срабатывания тормозной системы, а также характеристики работы двигателя и параметры трансмиссии (ее передаточные числа).

Программы PC-Crash и CARAT-3, при соблюдении процессуальных норм, могут использоваться в исследованиях судебной экспертизы обстоятельств ДТП, технического состояния ТС и экспертизе следов на ТС и месте ДТП.

3. Симулятор столкновений транспортных средств на основе метода DuMesh. В отличие от разработанных в 80-е и 90-е годы XX-го века хорошо известных импульсных и энергетических методов, DuMesh использует в качестве исходных данных свойства материала автомобиля и его трехмерную геометрию, что позволяет вычислять вектор силы взаимодействия автомобилей при столкновении в трехмерном пространстве и момент этой силы относительно центра масс автомобиля. Метод DuMesh может рассматриваться как некоторая упрощенная альтернатива известному несколько десятилетий методу конечно-элементного анализа [25] столкновения автомобилей, широко применяемому как при разработке конструкции автомобиля, так и для научных исследований его безопасности. Однако расчеты методом конечных элементов требуют как значительных затрат труда и времени на подготовку исходных данных и вычисления, так и высокой квалификации эксперта. Этим сдерживается их широкое применение для реконструкции обстоятельств ДТП, где желательны более простые и быстрые методы анализа.

DuMesh использует сеточную трехмерную модель оболочки автомобиля, что позволяет избежать ошибок при внесении геометрических параметров автомобиля. Интерактивный режим симуляции обеспечивается тем, что DuMesh не предусматривает формирование системы уравнений жесткости, как метод конечных элементов, и поэтому расчет методом DuMesh длится значимо быстрее. Трехмерные сетки моделей автомобилей могут быть построены пользователем или доступны из некоторых источников (например, EDVDB Vehicle Database, Version2, Engineering Dynamics Corporation, Beaverton, OR 1998, или Viewpoint Datalabs, Orem UT, 1998). Возможности метода DuMesh могут использоваться и для симуляции наезда на пешеходов,

но в этом случае точность определения коэффициентов жесткости имеет гораздо большее значение.

Наиболее сильной стороной метода DyMesh является возможность симуляции касательных столкновений автомобилей с большой протяженностью области контакта и малой величиной пятна контакта – для этого не требуется каких-либо дополнительных модификаций метода.

Например, на рисунке 1.8 показана сеточная модель автомобиля, состоящая из 2075 узлов и 3827 треугольных элементов, на видах сбоку и сзади [3].

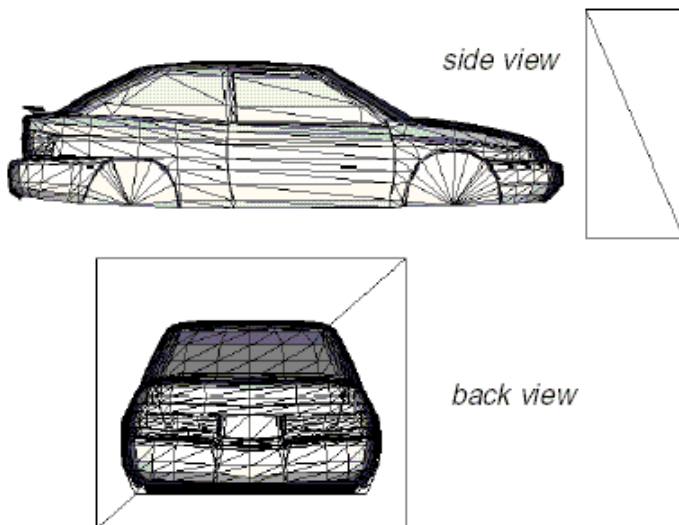


Рисунок 1.8 – Сеточная модель автомобиля на основе метода DyMesh

На рисунке 1.9 показана деформация сетки во времени и области уровня величины деформации.

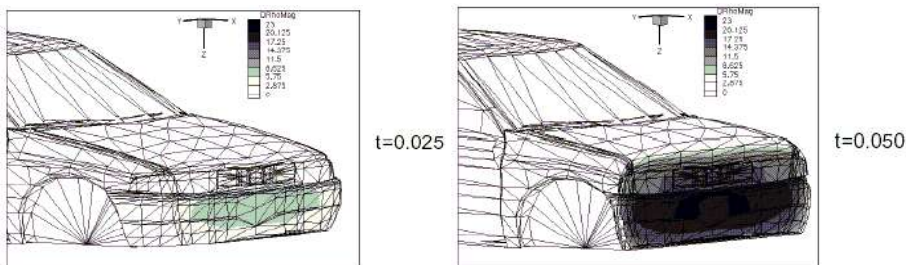


Рисунок 1.9 – Деформация сетки ТС во времени

На рисунке 1.10 представлено столкновение автомобиля Ford Festival со столбом в различные моменты времени (в момент столкновения скорость составляла 32 км/ч). Модель автомобиля была представлена 5020 узлами и

9403 треугольными элементами. В зоне столкновения сетка элементов была мельче, чтобы обеспечить более точные результаты расчета.

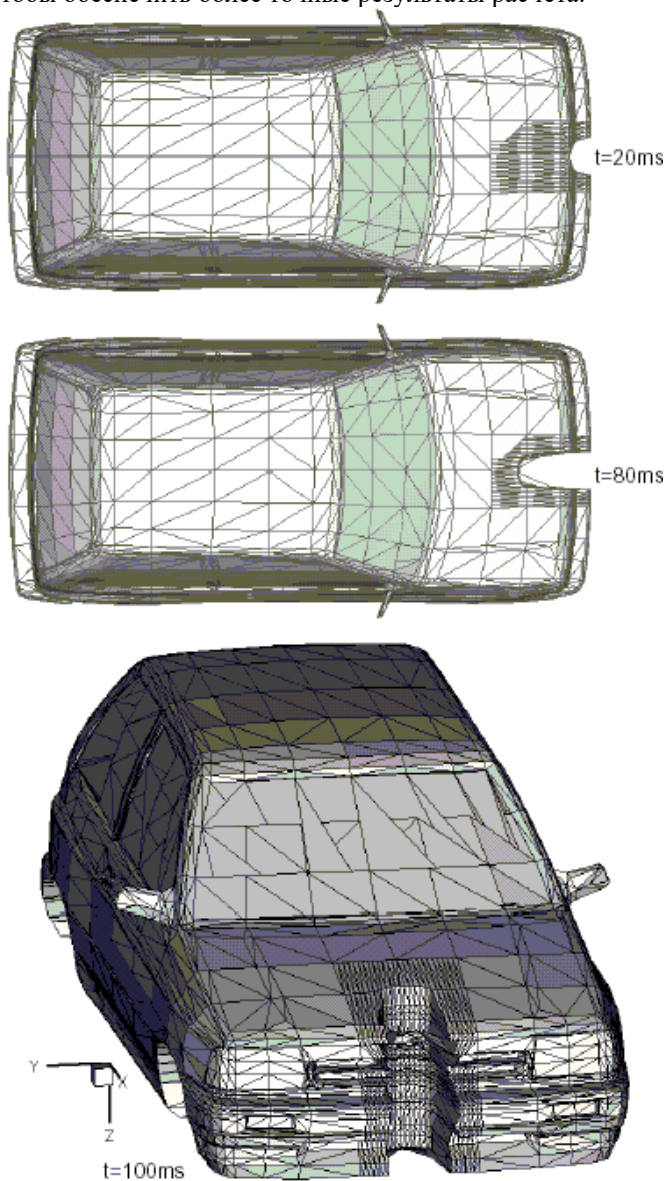


Рисунок 1.10 – Деформированная геометрия автомобиля в различные моменты времени на основе метода DyMesh

4. Система визуального моделирования дорожно-транспортной ситуации «АвтоСофт» (Autosoft) [33]. Программа предназначена для визуального моделирования дорожно-транспортной ситуации любой сложности и с любым количеством участников движения и других объектов.

В программу встроены несколько каталогов (рисунок 1.11): транспортных средств (содержит параметры ТС и их изображения), каталог целей экспертизы, каталог расчётных формул, каталог используемой при исследовании литературы, каталог экспертов и пр.

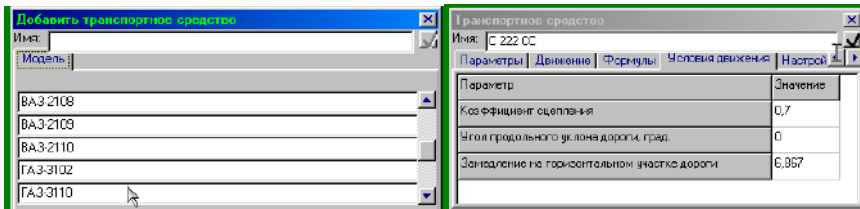


Рисунок 1.11 – Примеры встроенных каталогов

Перечислим основные возможности системы:

– воспроизводить дорожно-транспортную ситуацию любой сложности, с использованием различных видов объектов: участков дорог, ТС, объектов из файлов (\*.bmp), линий, светофоров различной конфигурации, пешеходов (рисунок 1.12);

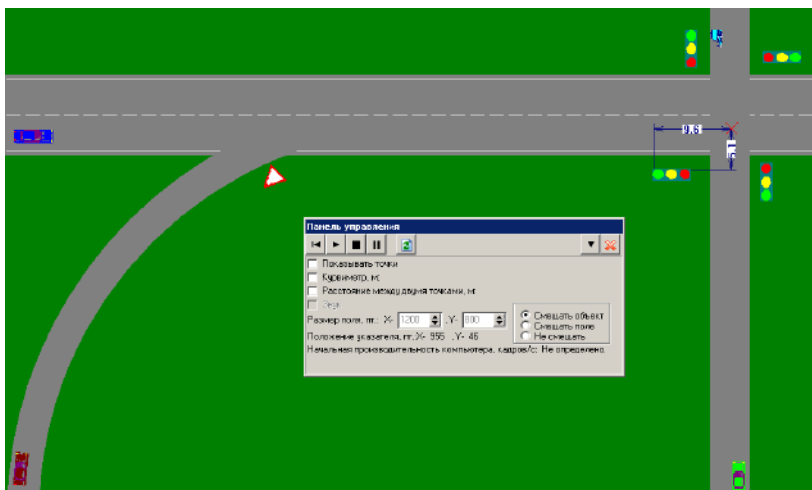


Рисунок 1.12 – Пример дорожно-транспортной ситуации

- анимировать (приводить в движение) модель дорожно-транспортной ситуации;
- задавать режимы движения ТС и пешеходов;
- задавать режимы работы светофоров;
- просматривать и редактировать каталог ТС и другие каталоги;
- сохранять схему дорожно-транспортной ситуации в отдельный файл (формат \*.bmp);
- сохранять и читать из файла модель и исходные данные для заключения эксперта (формат \*.exp);
- сохранять модель дорожно-транспортной ситуации в виде отдельного ролика (формат \*.exe);
- автоматически выбирать из модели ДТП исходные данные для заключения эксперта (рисунок 1.13);

The screenshot shows a software window titled "Документ" with several tabs: "Заключение", "Базы данных", "Обстоятельства", "Вопросы в документе", "Вопросы", "Параметры", and "Результаты". The "Заключение" tab is active, displaying a form with the following fields and values:

- Статус экспертизы: ..... (empty)
- Акт: ..... (empty)
- Постановление от: ..... (empty)
- Материалы поступили: ..... (empty)
- Начало экспертизы: 19.10.03
- Орган, назначивший экспертизу: СО Белоярского РОВД
- Фамилия должностного лица: Терехова Е.А.
- Дело №: ..... (empty)
- Категория ДТП:
  - Наезд на пешехода
  - Столкновение
  - Наезд на препятствие
- Первое транспортное средство: ГАЗ-3102
- Государственный номер ТС1: А 111 АА
- Водитель ТС1: Петров П.П.
- Второе транспортное средство: ВАЗ-2110
- Государственный номер ТС2: С 222 СС
- Водитель ТС2 (пешеход, препятствие): Сидя
- 1-ый эксперт: Иванов И.И.
- 2-ой эксперт: Иванов И.И.
- Используемая литература: ..... (empty)

At the bottom of the window, there are four buttons: "Задать данные", "Результаты", "Создать Word-документ", and "Пересчитывать".

Рисунок 1.13 – Пример экспорта данных моделирования в заключение эксперта

- автоматически проводить исследование и выдавать заключение эксперта в формате MS-Word (\*.doc);
- использовать другие функции, например: измеритель расстояния; курвиметр (рисунок 1.14); автоматический подбор параметров; просмотр формул, по которым производятся вычисления и т.п.

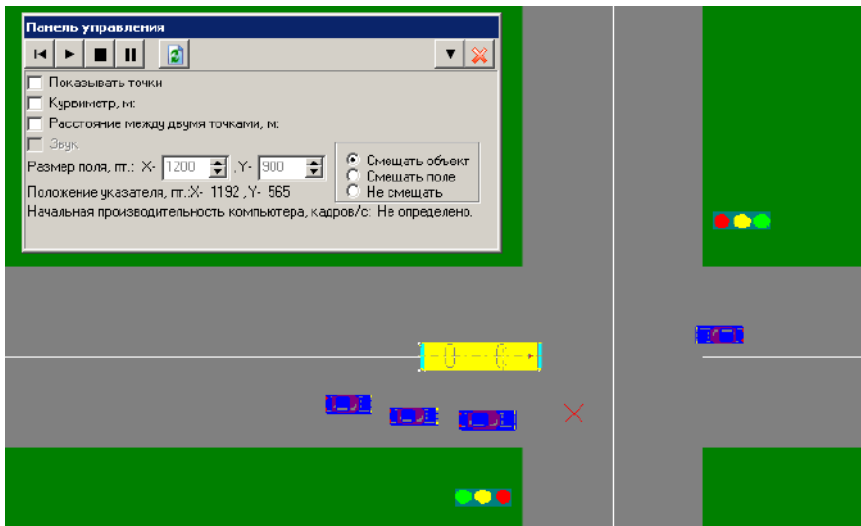


Рисунок 1.14 – Пример использования дополнительных функций

Исследование может проводиться одновременно по нескольким вариантам исходных данных. Программа необходима: юристам, специализирующимся на ДТП, автоэкспертным бюро, специалистам по безопасности движения автотранспортных предприятий, подразделениям ГИБДД.

Исследование обстоятельств ДТП с помощью вышеописанной программы позволяет произвести анализ сложившейся дорожно-транспортной ситуации и определить должные действия водителей в соответствии с требованиями Правил дорожного движения, а также решить вопрос о технической возможности предотвращения водителем дорожно-транспортного происшествия.

##### 5. Программа анализа ДТП «Авто Эксперт» (AutoExp 1.1).

Основной задачей программы является автоматизация расчетов и визуализация (графическое решение) рассчитываемых показателей.

Рассмотрим пример решения экспертных задач при наезде на пешехода в условиях ограниченной видимости движущимся попутно препятствием [26].

При запуске данной задачи на экране появляется окно (рисунок 1.15), в котором пользователю предлагается ввести значения параметров задачи, необходимых для выполнения экспертной оценки. Также приводится необ-

ходимый инструментарий определения значений скорости ТС1 по следу торможения и скорости пешехода по его характеристикам.

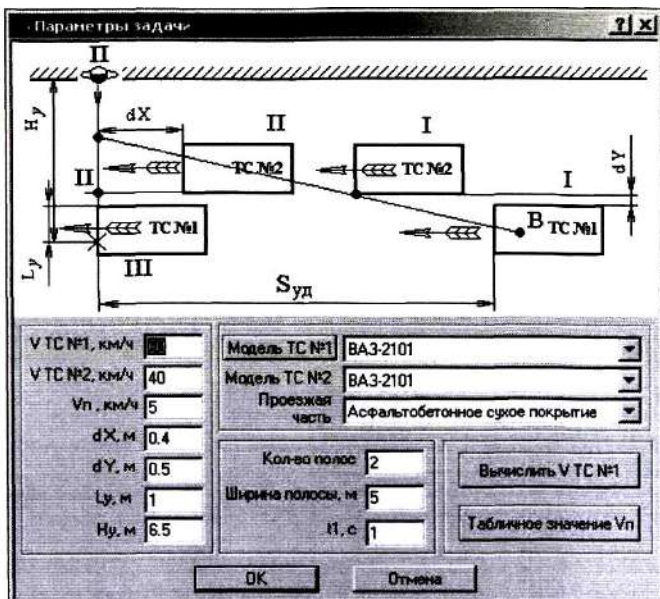


Рисунок 1.15 – Окно параметров задачи

При визуализации схемы наезда отображается “луч обзора”. Это средство помогает определить момент, когда пешеход становится видим для водителя ТС1. Луч меняет свой цвет в зависимости от положения на красный, если пешеход невидим для водителя ТС1 и зеленый – в обратном случае. В каждый момент под схемой высвечиваются таблица значений, содержащая как исходные данные, так и рекомендуемые для технической возможности водителя ТС1 предотвратить наезд путем торможения.

При моделировании можно изменять параметры времени, возвращая и фиксируя дорожную ситуацию в нужное положение (рисунок 1.16).

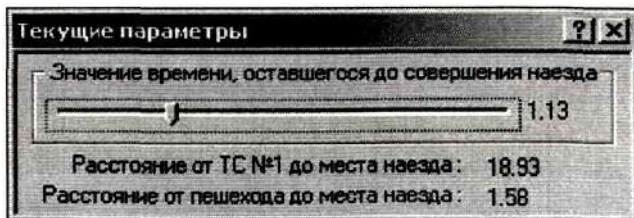


Рисунок 1.16 – Окно изменения текущих параметров времени



Используя пункт меню «Экспертные задачи» пользователь может выбрать решение из списка экспертных задач (рисунок 1.17).

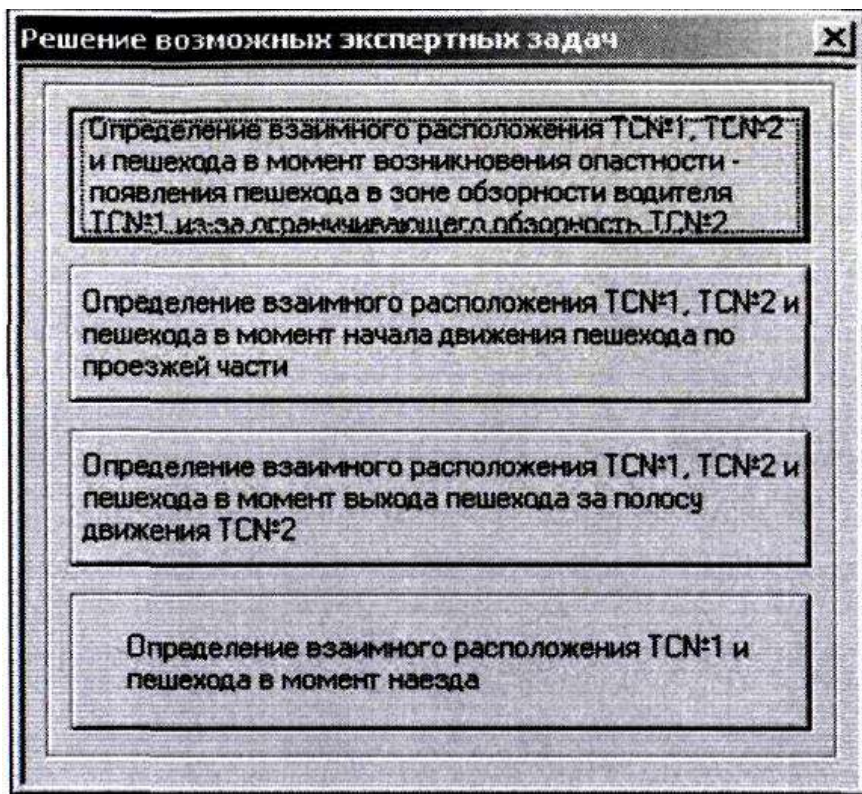


Рисунок 1.17 – Окно выбора экспертных задач

Инструментарий программы позволяет сохранять результаты моделирования в файл с полным формализованным отчетом, схемами и пояснениями нужного расширения и использовать его для печати.

5. Производитель программного обеспечения Engineering Dynamics Corporation's разработал совместные в использовании программы реконструкции и анализа ДТП EDCRASH и EDSMAC [34], которые в США и других странах используются при расследовании ДТП.

Инструментарий программ обеспечивает легкий доступ к редакторам ТС, окружающей среды, событий и воспроизведения, панели инструментов, диалоговым окнам ввода исходных данных и другим функциям, позволяющим экономить время (рисунок 1.18).



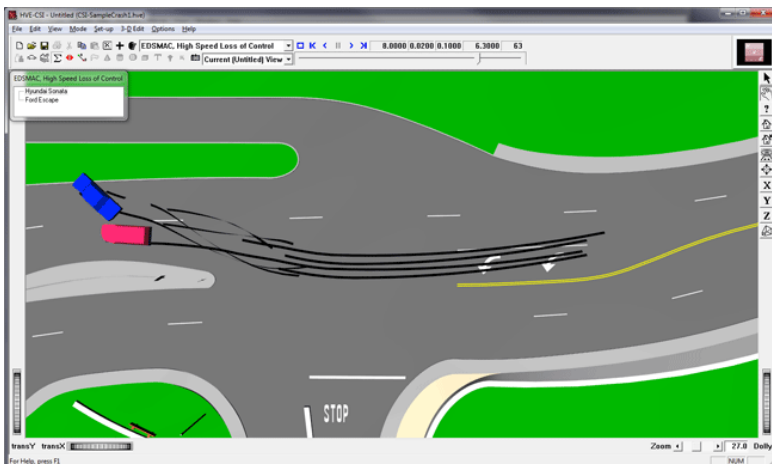


Рисунок 1.18 – Пример окна редактора и визуализации результатов

Перечислим основные возможности программных средств: работа с 3D поверхностями; большая библиотека ТС; реконструкция столкновений; моделирование ударов; работа с фактическими местами ДТП (фотограмметрия). Пользователи имеют широкие возможности масштабировать среду с помощью аэрофотоснимков. Трехкнопочной мышью пользователь с помощью камеры в динамическом режиме моделирования может следить за изменением дорожно-транспортной ситуации (рисунок 1.19).

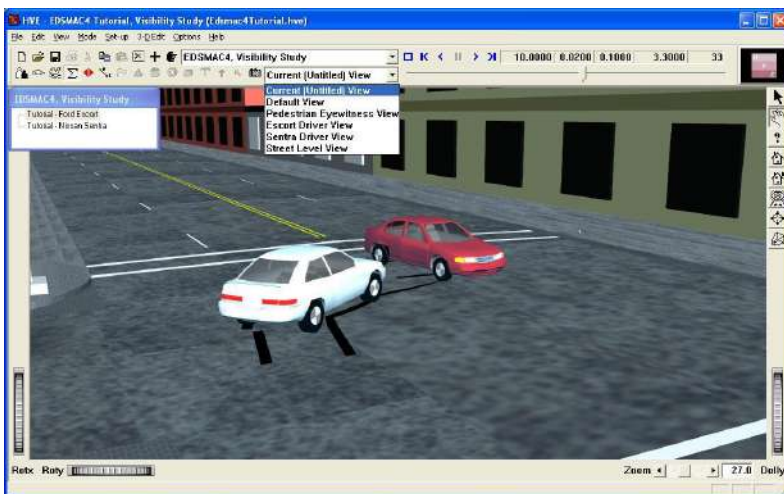


Рисунок 1.19 – Пример отображения результатов моделирования

Рассмотрим подробнее инструментарий программ EDCRASH и EDSMAC:

- редактор автомобиля позволяет изменять параметры выбранного автомобиля в соответствии с фактическим состоянием;
- редактор окружающей среды обладает возможностью прикреплять фотографии, рисунки или Google Earth карту и автоматически подбирать масштаб;
- редактор событий работает путем расчета и внесения изменений в положения, скорости ТС, управляющие действия водителей;
- редактор воспроизведения позволяет воспроизводить и редактировать текущие переменные, создает видеоотчеты по результатам моделирования (рисунок 1.20).

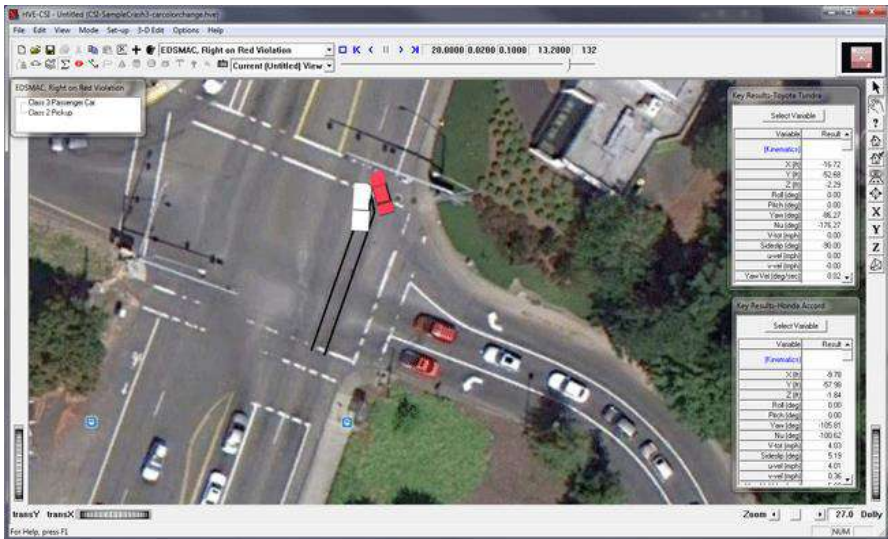


Рисунок 1.20 – Пример работы с редактором EDSMAC

Седьмая версия программы, доступная с 2009 года, имеет дополнительные возможности:

- инструмент Tool определяет в динамике моделирования расстояние между ТС;
- определение заноса ТС в любом месте траектории (учитываются частичные эффекты торможения при выборе пользователем нестандартных перемещений колес) (рисунок 1.21);
- редактор шин позволяет детализировать марку шин, пятно контакта при боковом скольжении;

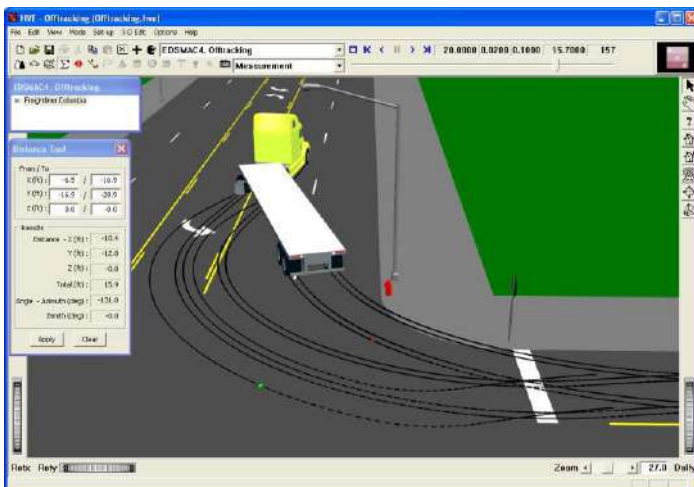


Рисунок 1.21 – Пример работы с редактором определения заноса

– коробка переключения передач (ручная или автоматическая) отображает передаточные числа трансмиссии. При выборе автоматической программа сама определяет правильную передачу в начале симуляции в соответствии с введенной пользователем начальной скоростью, а затем переключает коробку передач соответственно модели дорожно-транспортной ситуации и пр.

С целью повышения достоверности результатов исследования ДТП существующими компьютерными программами существует потребность в совершенствовании программного инструментария характеристик работы двигателя, параметров трансмиссии, подвески, тормозной системы и рулевого привода, теломассовых систем, детализации параметров дорожного покрытия, условий освещенности и пр.

### Контрольные вопросы

- 1 Укажите предмет и задачи различных видов автотехнических экспертиз.
- 2 Приведите разновидности и цели экспертных автотехнических исследований.
- 3 Перечислите факторы в рамках системы ВАДС, влияющие на уровень безопасности движения.
- 4 Опишите особенности применения компьютерной программы анализа и реконструкции ДТП CARAT-3.
- 5 Опишите особенности применения компьютерной программы моделирования ДТП PC-Crash.
- 6 Опишите особенности применения симулятора столкновений TC на основе метода DyMesh и программ реконструкции и анализа ДТП EDCRASH и EDSMAC.
- 7 Опишите особенности применения системы визуального моделирования ДТС «АвтоСофт» и программы анализа ДТП «Авто Эксперт».

## 2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 2.1 Методология математического моделирования

Математические модели основываются на математическом описании объекта. В математическое описание входят взаимосвязи параметров объекта. Математическое описание включает в себя не только взаимосвязь элементов и параметров объекта (**законы и закономерности**), но и полный набор числовых и функциональных **данных** объекта (характеристики; начальные, граничные, конечные условия; ограничения), а также **методы вычисления** выходных параметров модели. То есть под математическим описанием понимается **полная совокупность** данных, функций и методов вычисления, позволяющая **получать результат**.

Со своей стороны в *математическую модель* может не входить часть *математического описания* (чаще всего некоторые исходные данные), но в этих случаях должны присутствовать описания всех **допущений**, использованных для ее построения, а также **алгоритмы перевода** исходных и выходных данных с модели на оригинал и обратно.

В зависимости от математического описания математических моделей можно привести следующую классификацию [4]:

1. Теоретические математические модели аналитического типа: линейные, нелинейные, в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, в виде уравнений в частных производных, стохастические модели.
2. Эмпирические математические модели.

#### 2.1.1 Математические модели и их виды

*Теоретические математические модели аналитического типа.*

Простейшие аналитические модели могут быть заданы явно в виде функции одной или нескольких переменных.

Модель, заданная в явном виде, дает исчерпывающее описание исследуемого объекта. Она позволяет построить зависимость его характеристик от управляющих факторов, взять производные и найти экстремумы модели, определить характеристики модели в окрестности экстремумов и т. д.

Очень удобна графическая интерпретация таких моделей. Однако модели в виде формул могут быть разработаны только для очень простых объектов. Примером такой модели может служить Пуассоновское распределение с параметром  $\lambda$  (математическое ожидание) для  $k$  отказов в работе светофоров, поступающих на диспетчерский пульт городской системы управления дорожным движением в течение часа, представленное формулой

$$P_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

**Линейные математические модели.** Наиболее простыми являются так называемые линейные детерминированные модели. Они задаются в виде линейной формы управляющих переменных ( $x$ ):

$$W = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_kx_k$$

при линейных ограничениях вида

$$b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2 + \dots + b_{kj}x_k \geq b_j, \quad j = 1, \dots, q_1;$$

$$c_{1j}x_1 + c_{2j}x_2 + \dots + c_{kj}x_k = c_j, \quad j = 1, \dots, q_2;$$

$$d_{1j}x_1 + d_{2j}x_2 + \dots + d_{kj}x_k \leq d_j, \quad j = 1, \dots, q_3.$$

Общее число ограничений  $m = q_1 + q_2 + q_3$  может превосходить число переменных ( $m > k$ ). Кроме того, обычно вводится условие положительности переменных ( $x_i \geq 0$ ).

Исследование линейных моделей не представляет труда. В частности влияние каждой из переменных на характеристики модели вида

$$W = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$$

задается ее коэффициентами:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = a_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Для нахождения оптимума линейной модели  $W_{\text{опт}}$  разработан эффективный симплекс-метод [4].

К линейным иногда сводятся простейшие модели стоимости, рассматриваемые как совокупность производимых затрат.

Примером такой модели является классическая *модель стоимости перевозок* (транспортная задача) (рисунок 2.1).

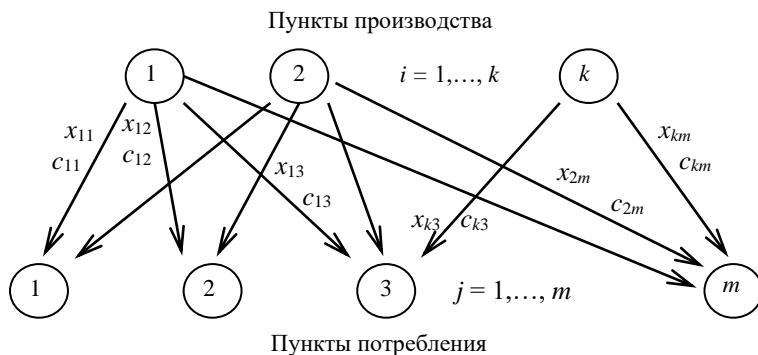


Рисунок 2.1 – Пример модели стоимости перевозок

Имеется  $k$  пунктов производства ( $i = 1, \dots, k$ ) и  $m$  пунктов потребления ( $j = 1, \dots, m$ ) некоторого продукта. Количество продукта, произведенного в

каждом из  $k$  пунктов производства, равно  $a_i$ ; количество продукта, необходимого в каждом из  $m$  пунктов потребления, равно  $b_j$ .

Предполагается равенство общего производства и потребления:

$$\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{j=1}^m b_j.$$

Количество продукта, перевозимого из  $i$ -го пункта производства в  $j$ -й пункт потребления, равно  $x_{ij}$ ; стоимость перевозки единицы этого продукта –  $c_{ij}$ .

Суммарная стоимость перевозок  $C_\Sigma$  задается *линейной моделью*:

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

при следующих ограничениях

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i; \quad \sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j; \quad x_{ij} \geq 0.$$

**Нелинейные детерминированные модели.** Нелинейные детерминированные модели обладают большей точностью и гибкостью. Они могут быть заданы в виде нелинейной функции одной или нескольких переменных или в виде дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных). Наиболее распространенными среди нелинейных моделей при описании дифференциальных уравнений являются:

- полиномиальные функции;
- позиномные функции;
- тригонометрические функции;
- экспоненциальные функции;
- обыкновенные дифференциальные уравнения;
- дифференциальные уравнения в частных производных др.

Нелинейные модели могут быть записаны в виде функционала, зависящего от управляющих переменных  $x$  и некоторых функций  $f(x)$  всех или части этих переменных:  $W = W(x, f(x))$ .

Область определения модели может быть ограничена с помощью равенств или неравенств:

$$\begin{aligned} x_i &= c_i, i = 1, \dots, m; \\ f(x) &= c_j, j = 1, \dots, l; \\ x_{i \min} &\leq x_i \leq x_{i \max}, i = 1, \dots, k; \\ f_j(x) &\leq c_j, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

По существу под определение нелинейной модели подпадает любое математическое описание дифференциальных уравнений, не укладывающееся в рамки простых моделей.

*Полиномиальные модели.* Полиномиальные модели основаны на идее приближенного представления модели конечным числом членов ряда Тейлора:

$$W(x) = W(x_0) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial W(x_0)}{\partial x_i} (x_i - x_{i0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 W(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0}) + \dots$$

Наиболее простой является *квадратичная модель*:

$$W(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j \geq i}}^k a_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^k b_{ij} x_i \geq b_j, \quad j = 1, \dots, q_1; \quad \sum_{i=1}^k c_{ij} x_i = c_j, \quad j = 1, \dots, q_2; \quad \sum_{i=1}^k d_{ij} x_i \leq d_j, \quad j = 1, \dots, q_3.$$

Квадратичные модели широко используются для представления экспериментальных данных и аппроксимации отдельных участков поверхности отклика. Если квадратичная модель также оказывается недостаточно точной, то используются полиномиальные модели более высоких порядков.

Исследование полиномиальных моделей частично можно осуществить аналитическими методами. Например, аналитически можно определить *степень влияния* отдельных переменных на характеристики модели.

*Полиномные модели.* Полиномные модели основаны на представлении модели в виде суммы произведений степенных функций:

$$W(x) = \sum_{j=1}^m c_j x_1^{\alpha_{1j}} x_2^{\alpha_{2j}} \dots x_k^{\alpha_{kj}} = \sum_{j=1}^m c_j \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_{ij}},$$

где  $x_i$  – управляющие переменные;  $\alpha_{ij}$  – произвольные положительные числа;  $c_j \geq 0$  – коэффициенты, обеспечивающие выпуклость модели.

Полиномные модели можно использовать для описания стоимости сложных систем.

К полиномным моделям сводится задача выбора геометрических характеристик ряда технических устройств, например, электромагнитов, силовых ферм и т. д.

Исследование полиномных моделей сложнее, чем моделей полиномиального типа, и осуществляется в основном численными методами. Для поиска оптимальных решений на основе полиномных моделей разработан специальный аппарат – так называемое геометрическое программирование.

**Математическая модель в виде обыкновенных дифференциальных уравнений.** Математическая модель в виде одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) широко используются при изучении переходных процессов в системах автоматического регулирования, при описании процессов движения (поток, частицы, транспортные средства).

В простейшем случае модель может иметь вид линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t)$$

или системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n);$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n).$$

Модель, заданная в виде дифференциальных уравнений, должна включать в себя необходимый набор начальных условий:

$$x(0) = C_0, \quad x'(0) = C_1, \quad x''(0) = C_2, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$$

или

$$x_1(0) = C_1, \quad x_2(0) = C_2, \dots, \quad x_n(0) = C_n.$$

Исследование моделей, заданных в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, осуществляется аналитическими и численными методами. Наиболее полными являются аналитические решения, обеспечивающие всесторонний анализ полученных результатов. Но такие решения получены лишь для ограниченного числа дифференциальных уравнений. Численные методы решения позволяют найти лишь конкретные значения изучаемой функции при заданной комбинации исходных данных. Для анализа модели можно использовать некоторую совокупность решений.

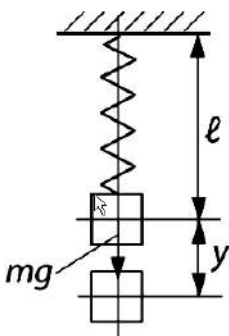


Рисунок 2.2 – Схема модели вертикальных перемещений груза на пружине

В качестве практического примера применения дифференциальных уравнений в приложении к расчету автомобильных конструкций [5] рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях линейной системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления. Такой системой моделируются вертикальные перемещения груза массой  $m$  на пружине (рисунок 2.2). Уравнение движения груза при его свободных колебаниях, согласно второму закону Ньютона, запишется в виде

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k(y + \delta_{ст}),$$



где  $y$  – вертикальное перемещение колеблющегося груза;  $t$  – время;  $\delta_{ст}$  – удлинение пружины при действии статически приложенного груза;  $k$  – коэффициент жесткости пружины.

**Модели, заданные в виде уравнений в частных производных.** Ряд задач, связанных с использованием физических полей, приводит к моделям в виде дифференциальных уравнений в частных производных.

Особенностью таких задач является то, что изучаемые параметры изменяются не только во времени, но и зависят от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  рассматриваемого пространства. Такие модели называются нестационарными. Модели, в которых параметры не зависят от времени, называются стационарными.

К таким моделям сводятся описания полей температур в элементах конструкции двигателя и полей скоростей при течении жидкости (газа). Уравнениями в частных производных описываются колебания элементов конструкции и поля напряжений, возникающих при работе этих элементов.

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных имеет вид

$$a_0 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_2} + \dots + a_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} = f(x_1, x_2, \dots, x_k, t).$$

Математическая модель, описанная дифференциальными уравнениями в частных производных, должна включать в себя необходимые для решения задачи *краевые условия*:

1. Должна быть задана область  $D$ , ограниченная поверхностью (на плоскости – кривой)  $\Gamma$ , в которой определяется решение.

2. Должны быть заданы условия на границе  $\Gamma$  этой области.

В случае нестационарного поля эти граничные условия, так же как и сама область могут меняться во времени.

Граничные условия могут быть 1-го, 2-го и 3-го рода:

а) граничные условия 1-го рода предусматривают задание на границе величины искомой функции:  $\Phi|_{\Gamma} = f_1(\Gamma)$  – для стационарного поля;  $\Phi(t)|_{\Gamma} = f_1(\Gamma, t)$  – для нестационарного поля;

б) граничные условия 2-го рода – предусматривают задание производной искомой функции:  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{\Gamma} = f_2(\Gamma)$  – для стационарного;

$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t) \right|_{\Gamma} = f_2(\Gamma, t)$  – для нестационарного поля;

в) граничные условия 3-го рода предусматривают комбинации функции и ее производной:

$$\left( a\Phi + b \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \Big|_{\Gamma} = f_3(\Gamma) - \text{для стационарного поля};$$

$$\left( a(t)\Phi(t) + b(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t) \right) \Big|_{\Gamma} = f_3(\Gamma, t) - \text{для нестационарного поля}.$$

3. Для нестационарных полей должны быть заданы одно или два начальных условия, характеризующих состояние поля в начальный момент времени:

$$\begin{aligned} \Phi(x_i) \Big|_{t=0} &= f_4(x_i); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_i) \Big|_{t=0} &= f_5(x_i), \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь  $x_i$  – координаты пространства.

Совокупность уравнений и краевых (и начальных) условий полностью определяет модель и позволяет провести ее исследование.

**Стохастические модели.** Точные величины и зависимости, используемые в детерминированных моделях, представляют собой лишь некоторые средние значения (математические ожидания) реальных случайных величин (зависимостей). Так, физические константы, характеризующие материалы и рабочие тела (предел прочности материала  $\sigma$ , теплопроводность  $\lambda$ , плотность  $\rho$  и т. д.) меняются в зависимости от партии материала и условий окружающей среды. Всегда имеется определенный разброс размеров деталей кузова, жесткости подвески, люфта в рулевом управлении и т. д. Все это приводит к тому, что и результирующие функции, характеризующие процесс, также носят случайный характер. Результаты, полученные с помощью детерминированной модели, представляют собой математические ожидания этих характеристик. При этом конкретные данные для конкретной системы могут существенно отличаться от этих математических ожиданий. Например, сроки замены тормозных накладок могут значительно не совпадать с нормативным сроком эксплуатации. Для учета таких отличий вводятся всевозможные «запасы прочности», призванные гарантировать работоспособность реальных объектов при неблагоприятном стечении обстоятельств.

Значительно более полные и объективные результаты можно получить при переходе от детерминированных к *стохастическим моделям*, то есть при переходе от точно заданных величин к соответствующим случайным величинам.

При этом константы ( $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $l, \dots$ ) заменяются случайными величинами  $\xi_\sigma, \xi_\lambda, \xi_\rho, \xi_l, \dots$ , подчиненными определенным законам распределения.

Однократное исследование стохастической модели приведет к некоторой случайной величине функции отклика  $\xi_w$ . Для получения значимых ре-

зультатов необходимо провести многократное исследование модели и получить распределение результирующей характеристики в интересующем исследователя диапазоне.

Такой метод исследования стохастической модели получил название метода статистических испытаний или *метода Монте-Карло*.

Трудоемкость исследования стохастических моделей существенно выше, чем моделей детерминированных:

1. Значительно возрастает объем исходной информации: замена констант случайными величинами, введение законов распределения этих величин усложняют модель.

2. Для получения распределения результирующей функции необходимо многократное исследование модели.

С другой стороны, полученное при статистическом моделировании распределение характеристик системы дает в руки исследователя чрезвычайно ценную информацию: такое распределение позволяет оценить не только среднее значение изучаемой величины, но и разброс этих значений, вероятности появления тех или иных значений при конкретном испытании (например, вероятность выхода из строя системы электроснабжения предприятия) и их зависимость от различных факторов.

Выбор закона распределения для конкретной случайной величины, входящей в стохастическую модель, может быть обоснован экспериментально или теоретически.

Конкретные параметры распределения ( $\mu$ ,  $\sigma, \dots$ ) всегда определяются на основе экспериментальных данных. Оценка параметров нормального распределения на основе выборки  $\{x_i\}$  из  $n$  случайных значений величины  $x$  дается соотношениями:

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n-1}} .$$

При использовании метода статистических испытаний характеристики изучаемой системы оцениваются на основе некоторой ограниченной выборки реализаций. Поэтому важно определить *достоверность* этой оценки.

Вероятность  $p$  пребывания системы в некотором состоянии (например, вероятность того, что время работы элемента рулевого гидроусилителя до первого отказа составит не менее  $t$  часов) определяется частотой этого события при моделировании:

$$p \approx \frac{n_+}{n} ,$$

где  $n_+$  – число реализаций, при которых наблюдалось изучаемое состояние системы;  $n$  – общее число реализаций.

Эта оценка является приближенной, так как определяется на основе ограниченной выборки. Отношение  $n_+/n$  называется *выборочной статистикой*.

Ошибка моделирования определяется отклонением выборочной статистики от вероятности

$$\delta = \left| \frac{n_+}{n} - p \right|.$$

Можно показать, что эта ошибка удовлетворяет неравенству

$$\delta \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n\alpha}}.$$

Здесь  $p$  – вероятность рассматриваемого состояния;  $\alpha$  – вероятность невыполнения оценки (*уровень риска*). Доверительная вероятность выполнения этой оценки равна  $1 - \alpha$ .

Погрешность стохастического моделирования обратно пропорциональна  $\sqrt{n}$ . То есть увеличение точности при стохастическом моделировании требует значительного увеличения числа реализаций.

Для уменьшения погрешности в 10 раз необходимо увеличить число реализаций (а значит и время счета) в 100 раз. Поэтому метод статистических испытаний не может дать решения с очень высокой степенью точности. Считается, что допустимая ошибка может составлять 1–5 % максимальной величины, полученной при моделировании.

Величина ошибки зависит также от вероятности  $p$  оцениваемого состояния и допустимого уровня риска  $\alpha$ . Обычно  $\alpha$  задают на одном из фиксированных уровней ( $\alpha = 0,005; 0,01; 0,025; 0,05; 0,1 \dots$ ).

*Эмпирические математические модели.*

**Идентификация эмпирических математических моделей.** Переход к эмпирическим моделям предполагает заведомый отказ от аналитических методов исследования. Поэтому эмпирические модели более разнообразны и включают в себя различные по форме математические зависимости.

При построении эмпирической модели обычно предполагается, что физическая теория работы объекта отсутствует или по тем или иным причинам не может быть использована.

При разработке эмпирической математической модели предполагается использование экспериментальных данных, полученных при испытаниях объектов. Результаты таких испытаний всегда представляют собой наборы величин, характеризующих работу объекта или системы при различных сочетаниях управляющих параметров.

Объект идентификации представляет собой так называемый «черный ящик» с некоторым числом регулируемых (или, по крайней мере, измеряе-

мых) входов  $x$  и одним или несколькими наблюдаемыми (измеряемыми) выходами (рисунок 2.3).

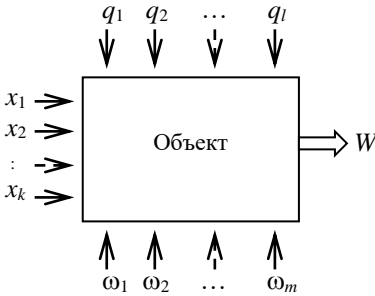


Рисунок 2.3 – Объект исследования – «черный ящик»:  $q_l$  – ограничения;  $x_k$  – управляющие переменные;  $\omega_m$  – неопределенности (шумы);  $W$  – характеристическая функция

Задачей идентификации является построение модели объекта по результатам наблюдений его реакции на возмущения внешней среды.

При этом необходимо учитывать ошибки, возникающие при измерении характеристик объекта.

Требуется построить зависимость (модель)  $W = f(x)$ , которая описывает характеристики изучаемой системы. Это уравнение называется *уравнением регрессии*.

Идентификацию модели начинают с выбора формы модели, т. е. вида функции  $f(x)$ . При этом на практике может встретиться два случая:

1) форма математической модели известна заранее, а задача идентификации сводится к определению коэффициентов этой модели. Так, описание ряда затухающих или развивающихся процессов дается зависимостями экспоненциального типа. Задачей исследования является определение коэффициентов  $\alpha, \beta$ ;

2) форма математической модели заранее неизвестна. В этом случае для идентификации модели используются отрезки бесконечных рядов, а задача заключается в определении числа членов ряда и коэффициентов при этих членах. Модель может быть представлена в виде

$$W = \sum_{i=1}^k \beta_{0i} f_0(x_i) + \sum_{i=1}^k \beta_{1i} f_1(x_i) + \dots + \sum_{i=1}^k \beta_{li} f_l(x_i),$$

где  $f_q(x_i)$  – некоторые заданные функции;  $\beta_{qi}$  – коэффициенты регрессии;  $q = 0, 1, \dots, l$ .

Конкретный вид модели зависит от выбора функций  $f_q(x)$ , по которым производится разложение  $W$ . Например, при описании колебательных процессов удобно использовать ряд Фурье  $W = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ .

Часто в качестве функций  $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x)$  выступают степенные функции  $x^0, x^1, x^2, \dots, x^l$ . Если ограничиться первыми членами разложения, то уравнения сведутся к линейным, квадратичным и другим полиномиальным моделям. Однако пока остается не ясным, сколько членов ряда обеспечивает наилучшее описание изучаемого процесса.

Обычно берут количество экспериментальных точек значительно больше, чем количество коэффициентов регрессии. В этом случае нельзя построить поверхность отклика, проходящую через все экспериментальные точки. Да этого и не требуется. При этом, однако, можно построить приближенную модель, обеспечивающую в некотором смысле *наилучшее совпадение* с экспериментальными данными. Конкретная форма модели зависит от выбора функций  $f_q(x)$  и количества членов ряда.

Сама постановка задачи идентификации включает в себя элемент неопределенности, возможность множественности решений. Важно выбрать лучшее или, по крайней мере, достаточно хорошее из этих решений.

Для оценки точности модели естественно использовать величины отклонений, полученных в эксперименте величин  $W_j$  и их оценок  $Wm_j$ , предсказанных моделью

$$\varepsilon_j = W_j - Wm_j.$$

Исключительное распространение получил *метод наименьших квадратов* отклонений реальных значений оцениваемой величины от значений, предсказанных моделью.

Специальные *методы планирования эксперимента* позволяют существенно повысить объем получаемой информации, улучшают характеристики эмпирических моделей, а также упрощают процедуру обработки экспериментальных данных. Однако на практике очень часто приходится иметь дело с неорганизованным (пассивным) экспериментом. Связано это, по крайней мере, с тремя причинами [4]:

1) исследователь может *только наблюдать* входы системы, но не может их регулировать, что полностью исключает возможность планирования эксперимента (типичная ситуация: астроном – галактика);

2) *неизвестны диапазоны* возможного изменения переменных (входов), что затрудняет планирование эксперимента и исключает возможность использования ряда эффективных методов планирования;

3) приходится строить модели идентификации *на основе уже полученных ранее* беспорядочных экспериментальных данных.

**Выбор оптимальной эмпирической модели.** Принцип наименьших квадратов позволяет найти наилучшую модель идентификации для исследуемой экспериментальной выборки с заданным уравнением регрессии вида

$$W = \sum_{i=1}^k \beta_{0i} f_0(x_i) + \sum_{i=1}^k \beta_{1i} f_1(x_i) + \dots + \sum_{i=1}^k \beta_{li} f_l(x_i).$$

Если имеются достаточно веские основания для выбора формы этого уравнения, никаких проблем не возникает. Однако, в большинстве случаев конкретная форма модели заранее неизвестна и может, вообще говоря, быть различной.

На первый взгляд может показаться, что более сложная модель (увеличение степени полинома) всегда обеспечивает получение бóльшей точности. **На самом деле это не так.** При переходе к полиномам более высокой степени можно, конечно, получить *лучшее согласие* регрессионной кривой с экспериментальными данными. Для  $m = n$  это согласие будет абсолютным, но при этом получится *худшее согласие* с истинным характером процесса  $W(x)$ . Дело в том, что экспериментальные данные представляют собой случайные величины и содержат лишь ограниченную информацию о характере  $W(x)$ . Увеличение степени полинома целесообразно лишь до тех пор, пока из экспериментальной выборки извлекается надежная информация. Таким образом, возникает проблема выбора формы модели.

Подход к решению этой проблемы основан на статистическом исследовании уравнений регрессии.

1. *Метод всех возможных регрессий* основан на последовательном изучении всех возможных моделей, из которых выбирается лучшая модель.

Метод представляется мало пригодным для анализа сложных систем, так как отличается высокой трудоемкостью.

2. *Метод исключения* предполагает исследование наиболее полной (в пределах разумного) модели и последовательную проверку на значимость всех ее членов. При этом для каждого из членов модели вычисляется величина критерия Фишера  $F$ . На основе полученного множества  $\{F_i\}$  выбирается член уравнения регрессии, соответствующий минимальному значению критерия  $F_i$ . Если это минимальное значение меньше критического при выбранном уровне риска ( $F_i < F_{кр \alpha}$ ), то соответствующий член исключается из регрессионного уравнения как несущественный, после чего все коэффициенты регрессии пересчитываются заново и вновь осуществляется проверка их значимости.

Если  $F_i > F_{кр \alpha}$ , то все члены модели существенны и уравнение регрессии остается в первоначальном виде. Однако, если это произошло уже на первом шаге исследования, стоит рассмотреть целесообразность усложнения первоначальной модели.

Трудоемкость этого метода меньше, чем метода всех возможных регрессий.

3. *Метод включений* по существу противоположен методу исключений и предусматривает последовательное включение в модель новых членов с проверкой их статистической значимости.

Трудоемкость этого метода существенно меньше трудоемкости рассмотренных выше методов.

Общим *недостатком* всех рассмотренных ранее методов является использование для оценки модели того же экспериментального материала, на основе которого эта модель построена.

4. Иной подход основан на использовании *регуляризации*. При этом подходе все экспериментальные данные разбиваются на две части: *обучающую*

( $n_1$ ) и *проверочную* ( $n_2$ ). Первая из них используется для определения коэффициентов регрессии модели, вторая – для оценки модели в целом.

Оптимальные по этому подходу модели мало чувствительны к небольшим изменениям исходных данных.

Число точек обучающей последовательности должно быть, по крайней мере, на единицу больше числа коэффициентов регрессии ( $n_1 > m+1$ ). Для повышения достоверности результатов этот запас должен быть существенно увеличен ( $n_1 \geq (2 \dots 3)m$ ). Проверочная последовательность должна включать в себя хотя бы одну точку.

В ряде случаев в качестве критерия регуляризации удобно использовать *критерий несмещенности*, обеспечивающий наименьшее изменение модели при изменении состава обучающей последовательности. При этом весь экспериментальный массив разбивается на две одинаковые по величине последовательности ( $n_1 = n_2$ ), каждая из которых поочередно используется в качестве обучающей. В результате их использования определяются две независимые, одинаковые по форме модели  $W_m^*(n_1)$  и  $W_m^{**}(n_2)$ . Оптимальная модель ищется *по всем точкам выборки*.

Критерий регуляризации всегда имеет четко выраженный минимум, что обеспечивает объективное выделение модели *оптимальной сложности*.

Вычислительные эксперименты, проводимые на основе математических моделей, помогают увидеть за частным общее, развить универсальные методы анализа объектов различной физической природы, познать свойства изучаемых процессов и систем.

### 2.1.2 Адекватность математических моделей

Особенностью математических моделей является то, что получение с их помощью каких-либо результатов связано с вычислениями. Так возникает необходимость понятия вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент – это получение результатов с помощью математической модели для какого-либо конкретного случая исследований. Это может быть как **единичный** расчет одного параметра, так и **комплекс** расчетов целого спектра параметров модели во множестве определенным образом связанных условий. Во втором случае большое значение приобретает процедура *планирования вычислительного эксперимента*, целью которого является получение максимума **достоверной** информации при минимуме затрат. Под достоверностью результата вычислительного эксперимента понимается одновременное выполнение двух условий: во-первых, результат должен быть достаточно **точен**, а во вторых, не может быть **опровергнут** с помощью каких-либо дополнительных расчетов. В математической статистике этим понятиям соответствуют понятия **несмещенности** и **состоятельности** оценок, получаемых из наблюдений. При *планировании вычислительного экспери-*



мента используются многие методы математического моделирования – от простого здравого смысла до *теории катастроф* и методов *математической статистики*.

Центральным понятием теории математического моделирования является понятие *адекватности*, так как аргументированная проверка адекватности обеспечивает получение **практически значимых результатов**.

Адекватность *математической модели* – это соответствие результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта. Это соответствие следует оценивать с точки зрения целей исследования. Поэтому возможны различные подходы к оценке адекватности различных моделей.

Для выявления этого соответствия для **механических систем и процессов**, характеризующихся измеримыми величинами – параметрами, – необходимо провести сравнение параметров модели и оригинала **в одних и тех же условиях**. Очевидно, что сравнивать следует лишь **соответствующие** друг другу параметры между собой и только **в той области** функционирования объекта, в которой предполагается его исследовать.

Для адекватности математической модели поведению оригинала достаточно убедиться в выполнении двух свойств: **точности** и **непротиворечивости**. Однако так звучат лишь общие, образные требования к адекватности, для практического применения необходимо сформулировать математические формы этих требований.

**Точность** в задачах механики означает, что обобщенная характеристика **рассогласования** соответствующего параметра модели и оригинала ( $\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$ ) должна быть не больше, чем заранее заданное значение *приемлемой погрешности*  $\Delta u_{\text{доп}}$ . В качестве такой обобщенной характеристики может выступать наибольшее по модулю значение рассогласования, среднее значение рассогласования или статистическая оценка, как, например:

– *доверительный интервал* для математического ожидания рассогласования модели и оригинала;

– диапазон практически наблюдаемых значений рассогласования;

– интегральная оценка одного из следующих типов:

$$K_{\Delta} = \alpha \int_0^T \Delta u(t) dt \left( K_{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta u_i \right), \quad \text{или} \quad K_{\delta} = \beta \int_0^T \delta u(t) dt \left( K_{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta u_i \right).$$

Хотелось бы отметить то, что критерии проверки точности не должны рассматриваться как догма, они выбираются в соответствии с целью исследований.

**Непротиворечивость** подразумевает идентичный характер изменения соответствующих параметров, т. е. идентичный вид основных **свойств**

функциональных зависимостей на отдельных участках (например, возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т. п.).

Какие-либо выводы о соответствии их поведения можно сделать только на основании статистической обработки. Поэтому адекватность проверяется с помощью **статистических критериев**, которые могут с определенной вероятностью свидетельствовать о соответствии результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта в соответствующих условиях.

Для образной характеристики понятий точности и непротиворечивости можно воспользоваться рисунком 2.4. На нем изображены графики некоторой функциональной зависимости между параметрами оригинала, которую модель должна адекватно воспроизвести. Для первого знакомства с понятием адекватности нижеследующий анализ приводится в нестрогой форме – строгий математический аппарат проверки адекватности дан в виде алгоритма в отдельной главе. В случае "а" существует область, в которой выполняются некоторые заданные требования точности, т. е. погрешность модели по отношению к оригиналу меньше некоторого допустимого значения. Однако с точки зрения такого свойства рассматриваемой зависимости, как возрастание-убывание, эта модель противоречит поведению оригинала, поэтому не может быть признана адекватной. Случай "б" демонстрирует непротиворечивый ход зависимости с той же точки зрения.

Колебания на графиках "в" и "г" рисунка 2.4 связаны с возмущающими факторами, не поддающимися регистрации, а также с погрешностями записывающей аппаратуры. Тем не менее заменять экспериментальную зависимость более "красивой" нельзя, так как истинный характер ее неизвестен. В этом случае сравнение оригинала и модели особенно сложно. В случае "в" заметна систематическая погрешность модели – постоянно присутствующее рассогласование между параметрами модели и оригинала. В этом случае, если все наблюдаемые частные значения рассогласования **существенно** меньше допустимого значения погрешности, то модель можно считать достаточно точной.

В случае "г" систематическая погрешность модели значительно меньше той случайной ее составляющей, которая обязана своим появлением возмущающим факторам.

Что касается свойства непротиворечивости модели в случаях "в" и "г", то этот вопрос значительно сложнее. Если по своей природе исследуемая зависимость должна быть более плавной, чем это зарегистрировано на оригинале, то это значит, что практически все высокочастотные колебания являются результатом наложения шума (неучитываемых факторов), который следует отфильтровать. Эта неформализуемая процедура должна быть построена только на одном требовании: для непротиворечивости **рассогласование** между оригиналом и моделью не должно подчиняться какой-либо **закономерности**, рассогласование должно вести себя вполне хаотически.

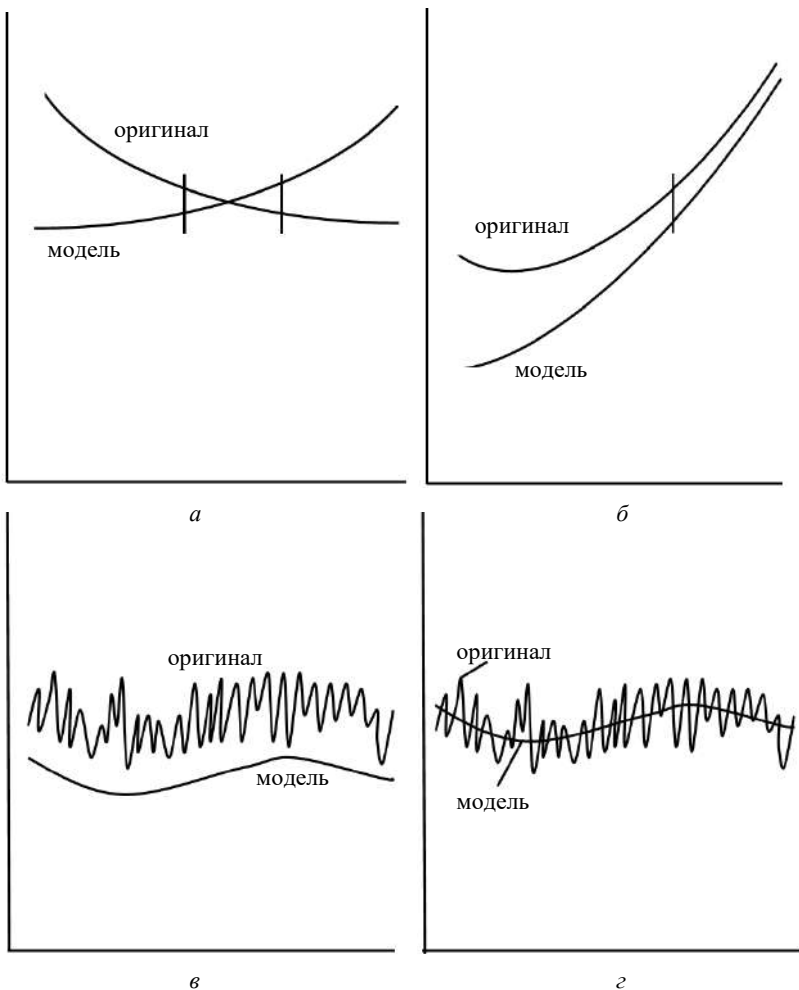


Рисунок 2.4 – Образная характеристика понятий точности и непротиворечивости

Таким образом, становится очевидным, что для проверки адекватности необходимо иметь:

- **исчерпывающую** информацию о реальном случае (что всегда трудно, а подчас бывает практически невозможно);
- результаты **контрольного вычислительного эксперимента**, воспроизводящего известный реальный случай;
- критерий оценки **точности** математической модели;
- критерий проверки **непротиворечивости** математической модели.

При построении критерия проверки адекватности необходимо учитывать как особенности модели, так и область ее применения:

- **ограниченность** допустимого диапазона изменения параметров системы;
- соответствие математического описания **условий** реального и вычислительного экспериментов;
- возможную **неоднозначность** решений в вычислительном эксперименте;
- **точность** самого вычислительного эксперимента.

Поясним это на примере. Если предполагается исследовать начальную скорость движения транспортного средства по длине следа торможения, то нет необходимости добиваться адекватности моделирования таких явлений, как время реакции водителя и срабатывания тормозного привода, которые принимаются по справочникам.

*Точность* модели определяется погрешностью – рассогласованием значений рассматриваемого параметра  $u$ :

– абсолютная погрешность  $\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$  ;

– относительная погрешность  $\delta u = \frac{\Delta u}{u_{\text{оригинала}}} 100 \%$  ;

– относительная приведенная погрешность  $\delta u = \frac{\Delta u}{u_{\text{меры}}}$  , (где  $u_{\text{меры}}$  – неко-

торое характерное значение, например  $u_{\text{меры}} = |u|_{\text{max}}$  ).

*Погрешности* получили следующие эпитеты:

- грубая – недопустимая с точки зрения целей исследования;
- удовлетворительная – допустимая с точки зрения целей исследования;
- случайная – принимающая случайные значения при многократном повторении опыта в неизменных условиях (например, замер разгона автомобиля до скорости 100 км/ч с помощью одного и того же секундомера);
- систематическая – принимающая неизменное значение при многократном повторении опыта в неизменных условиях (то же, что в предыдущем случае, но с испорченным секундомером, который начинает отсчет времени на 0,03 с позже старта).

При математическом моделировании возможны *погрешности*, обусловленные различными причинами:

- погрешности **физической абстракции** (неточность физических законов и закономерностей, неучет некоторых факторов);
- погрешности **математического описания**:
  - приближенность уравнений, приближенность данных;
  - погрешность расчетов (погрешность установок, компьютерных программ, приближенные методы расчетов);

– погрешность **обработки результатов** (округление результатов, графическое изображение).

Из всех перечисленных причин в пояснении нуждается лишь погрешность расчетов, которую при моделировании всегда надо учитывать.

Выясним особенности **приближенных вычислений**, влияющих на погрешность расчетов с помощью математических моделей. Будем определять погрешность результатов при известных погрешностях операндов  $\Delta a$  и  $\Delta b$ .

1. Погрешности суммы:

$$(a + \Delta a) + (b + \Delta b) = (a + b) + (\Delta a + \Delta b),$$

т. е. абсолютная погрешность определится:

$$\Delta(a + b) \leq |\Delta a| + |\Delta b|.$$

**Абсолютная погрешность суммы ограничена суммой модулей абсолютных погрешностей слагаемых**; а относительная:

$$\delta(a + b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b} = \frac{\delta a a + \delta b b}{a + b},$$

следовательно,  $\min(\delta a, \delta b) < \delta(a + b) < \max(\delta a, \delta b)$  относительная погрешность суммы принимает значение между наибольшей и наименьшей относительными погрешностями слагаемых.

2. Погрешности разности:

$$(a + \Delta a) - (b + \Delta b) = (a - b) + (\Delta a - \Delta b),$$

т. е. абсолютная погрешность определится:

$$\Delta(a - b) \leq |\Delta a| + |\Delta b|.$$

**Абсолютная погрешность разности ограничена суммой модулей абсолютных погрешностей операндов**; а относительная:

$$\delta(a - b) = \frac{\Delta a - \Delta b}{a - b} = \frac{\delta a a - \delta b b}{a - b},$$

т. е. относительная погрешность разности принимает значения больше относительных погрешностей операндов, а при близких их значениях – не ограничена. Из этого следует, что в приближенных вычислениях необходимо **избегать** разности близких величин, что особенно *важно учитывать при программировании* алгоритмов.

3. Погрешности произведения:

$$(a + \Delta a) \times (b + \Delta b) = (a \times b) + (\Delta a \times b + \Delta b \times a) + (\Delta a \times \Delta b),$$

а если предполагать малость абсолютных погрешностей по сравнению со значениями самих величин, то абсолютная погрешность определится:

$$(a + \Delta a) \times (b + \Delta b) = \Delta a \times b + \Delta b \times a.$$

**Абсолютная погрешность произведения приближенно равна сумме перекрестных произведений абсолютных погрешностей сомножителей на смежные сомножители;** а относительная:

$$\delta(a \times b) = \frac{\Delta a \times b - \Delta b \times a}{a \times b} = \delta a - \delta b,$$

т. е. относительная погрешность произведения приближенно равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

4. Погрешности деления:

$$\frac{a + \Delta a}{b + \Delta b} = \frac{\Delta a \times b}{(b + \Delta b)^2} + \frac{\Delta a \times b + a \times \Delta b}{(b + \Delta b)^2} + \frac{\Delta a \times \Delta b}{(b + \Delta b)^2},$$

т. е. абсолютная погрешность определится:

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{\Delta a \times b + a \times \Delta b}{(b + \Delta b)^2}.$$

Абсолютная погрешность частного приближенно равна сумме произведений абсолютной погрешности делимого на делитель и абсолютной погрешности делителя на делимое, деленной на квадрат делителя; а относительная:

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{\Delta a \times b + \Delta b \times a}{(b + \Delta b)^2} \frac{a}{b} \approx \delta a + \delta b,$$

**т. е. относительная погрешность частного приближенно равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.**

5. Погрешности вычисления функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в предположении разложимости ее в ряд Тейлора по степеням  $x_n$  и малости абсолютных погрешностей  $\Delta x_n$  по сравнению со значениями  $x_n$  в первом (линейном) приближении:

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i,$$

т. е. абсолютная погрешность определится величиной:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i,$$

а относительная:

$$\delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \frac{1}{|f(x_1, x_2, \dots, x_n)|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left| x_i \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \delta x_i.$$

6. Погрешность методов вычисления в более сложных случаях связана с применяемым алгоритмом. Поэтому для обеспечения возможности контроля погрешности методы должны обладать свойствами аппроксимации и устойчивости.

### 2.1.3 Алгоритм научных исследований с помощью компьютерного моделирования

Математическое моделирование – мощное современное средство научных исследований и его применение требует соблюдения определенной строгости во избежание получения неверных выводов. Теперь можно обоснованно дать следующий выработанный практикой *алгоритм действий*, которого рекомендуется придерживаться:

- 1) изучение оригинала: выявление основных факторов, особенностей, **диапазонов** исследуемых параметров, **условий и задач** исследования, постановка (формулировка) задачи исследования, оценка требуемой **точности**;
- 2) феноменологическое описание оригинала ("физическое" описание): поиск **аналогий и функциональных** зависимостей на основе предыдущего этапа и достижений в различных областях **науки**;
- 3) *математическое описание* оригинала;
- 4) разработка алгоритмического и программного **обеспечения** для реализации математического описания на компьютере;
- 5) проведение контрольного вычислительного эксперимента (воспроизводящего реальный известный случай поведения оригинала в конкретных условиях);
- 6) оценка *адекватности* результатов *контрольного вычислительного эксперимента* **реальному случаю**; при необходимости – повторение алгоритма с пункта 3, 2 или 1;
- 7) *планирование* вычислительного эксперимента **в целях исследования**;
- 8) проведение *вычислительного эксперимента* в целях исследования, **обработка** его результатов;
- 9) **анализ** результатов вычислительного эксперимента, сравнение с результатами изучения оригинала (при необходимости – повторение алгоритма с пункта 7 или 1);
- 10) формулировка выводов исследования.

Пункты 1–6 составляют процесс *моделирования* – построения математической модели. В нем выделяют процесс *идентификации* (пункты 3–6).

По такому алгоритму проведены многочисленные исследования, например:

– автомобилестроение (моделирование и калибровка трансмиссии, исследование ДТП, рисунок 2.5);

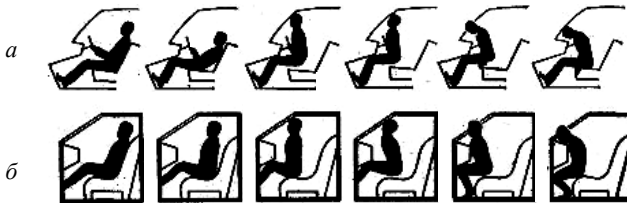


Рисунок 2.5 – Механизм образования травм у водителя (а) и переднего пассажира (б) при столкновении

- страхование от несчастных случаев при ДТП;
- физическое моделирование (моделирование механических, электрических, гидравлических систем, рисунок 2.6) [10];

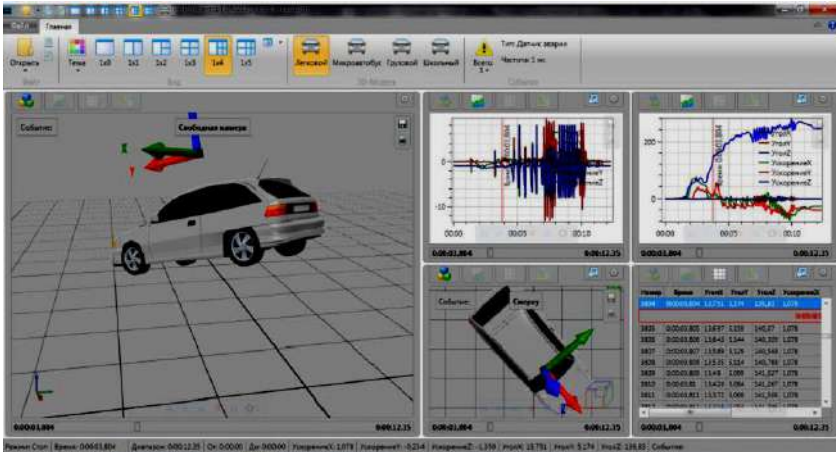


Рисунок 2.6 – Пример компьютерного моделирования ДТП с помощью программы «АИ монитор» на базе ДТП (АИ-2.0)

- электрических схем и анализа надежности, разработки новых систем и модернизации уже существующих, рисунок 2.7).

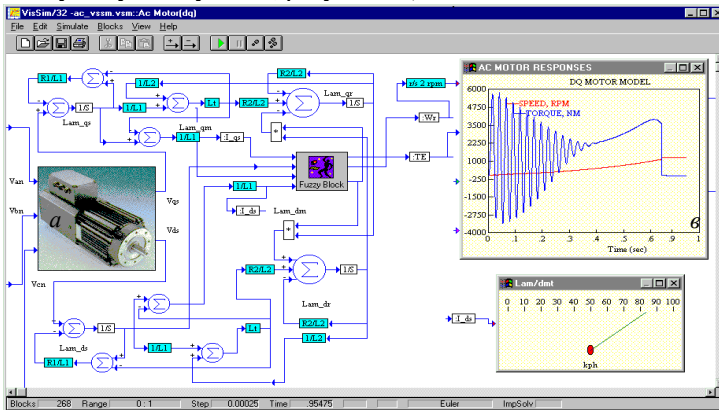


Рисунок 2.7 – Модель электрической системы

**Основные принципы математического моделирования.** В заключение сформулируем все те "правила" строгости процесса моделирования в виде принципов математического моделирования механических систем и процессов.



1. Главным из этих принципов безусловно является обеспечение высокой степени **адекватности** математической модели. В теории математического моделирования принято называть моделью только тот объект, который успешно прошел оценку адекватности. Адекватность математической модели механических систем и процессов основывается на удовлетворительной *точности и непротиворечивости* по отношению к поведению оригинала. Проверка этих качеств модели делается чаще всего с помощью методов математической статистики.

2. Принцип *состоятельности результатов вычислительного эксперимента* трактуется, как обеспечение результатов, безусловно приближающихся к истине. Состоятельность здесь следует понимать как статистический термин, обозначающий стремление по вероятности при увеличении объема информации результатов вычислительного эксперимента к истинным значениям параметров исследуемого явления. Этот принцип требует предельной математической строгости, то есть использования в программном обеспечении вычислительных методов, проявляющих при их применении одновременно *устойчивость, сходимостъ и однозначность*.

3. Принцип **удобства исследователя** – простота обращения с программным обеспечением, компоновки вариантов расчета, обработки и представления результатов вычислительного эксперимента – все это достигается развитым **диалоговым** режимом работы, **сервисным** программным обеспечением (таблицы, графики и т. п.) и **унификацией** всего программного обеспечения. Обычно выделяемые принципы математического моделирования: гибкость, инвариантность и динамичность – сводятся в основном к полной унификации всего программного обеспечения. В конечном итоге следует стремиться к такому состоянию программного обеспечения, когда для решения новой задачи требуется лишь подготовить исходные данные.

4. Принцип **планирования** вычислительного эксперимента обеспечивается применением методов и приемов планирования эксперимента.

5. Приоритет **физически обоснованных** закономерностей перед статистическим моделированием и приемами упрощения моделей. Во избежание ошибок при принятии решений необходимо **обосновать** возможность некоторой **экстраполяции** результатов вычислительного эксперимента.

## 2.2 Методы разработки математических моделей

Можно построить очень сложную математическую модель, учитывающую все видимые и предполагаемые факторы и явления, но получение результата с ее помощью может оказаться не менее сложным, чем на оригинале. Можно построить очень простую модель, отображающую минимум очевидных свойств объекта, но тогда нельзя с ее помощью исследовать тонкие свойства. Задача *построения математической модели* – это отыскание оп-

тимального **компромисса** между простотой модели и степенью ее адекватности изучаемому оригиналу.

Построение математической модели (синтез математической модели) требует решения достаточно сложных проблем, среди которых:

- множественность критериев оценки качества функционирования моделируемой системы (*многокритериальность*);

- большая размерность описания сложных систем ("*проклятие размерности*");

- *адекватность*.

Под многокритериальностью понимается наличие подчас противоречивых требований к различным элементам сложной системы или к системе в целом (например, экономичность и безопасность пассажирских перевозок, быстрота и качество обслуживания). Для решения этой проблемы применяют различные приемы *ранжирования*, в том числе и основанные на результатах применения *методов экспертных оценок*.

С "проклятием размерности" борются тоже *ранжированием*, а также *агрегированием*, что позволяет решать задачу поблочно (поагрегатно). Наиболее сложной при этом остается задача **выявления факторов**, способных описать изучаемое явление, а также **взаимосвязи** различных факторов, входных и выходных данных системы. Для этого помимо глубокого изучения физических особенностей системы подчас бывает необходимо проводить *многомерный статистический анализ* (глава 6) результатов экспериментов (вычислительных или натуральных).

Дадим краткую характеристику методам математического моделирования.

**Ранжирование** – неформализуемый анализ, в результате которого можно произвести распределение параметров по **важности (рангу)**; наиболее важные необходимо учитывать, наименее важными иногда можно пренебречь, промежуточные по важности можно учесть в виде поправок, каждому из них можно приписать весовые коэффициенты.

Например, исходя из данных ДТП по видам нарушений, можно отметить, что самое распространенное – нарушение правил проезда пешеходных переходов

**Агрегирование (декомпозиция)** – разбиение большого числа факторов (параметров) задачи на небольшое число групп, блоков (агрегатов) по определенному принципу; предполагает, с одной стороны, вполне конкретные связи между блоками, которые нетрудно формализовать и учесть, а с другой стороны, возможность решения необходимых вопросов внутри агрегата.

На рисунке 2.8 приведен пример декомпозиции технологической схемы ремонта, включающий: разборку (RAZB), дефектовку узлов и деталей на рабочих местах (PM), выполнение рабочими (R) технологических операций (MTXO), сборку (SBOR).

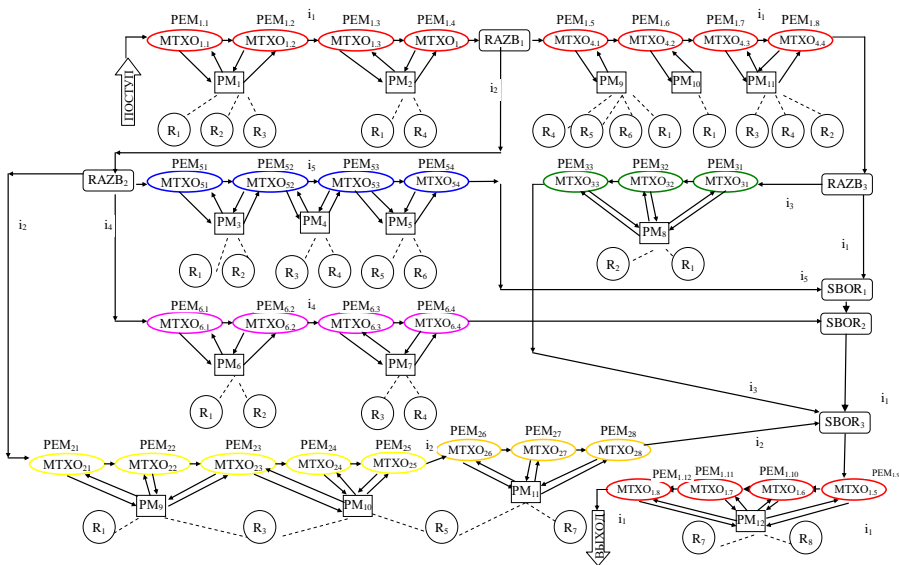


Рисунок 2.8 – Структура рабочих мест ремонтных операций изделия

**Теория катастроф** – часть математической логики, которая позволяет в области изменения основных параметров (факторов), связанных **аналитически**, выявить точки, линии, плоскости и другие границы (*бифуркации*), на которых происходят резкие изменения качественного поведения рассматриваемой системы – "катастрофы" той или иной интерпретации поведения системы.

Применение теории катастроф можно найти в исследованиях устойчивости сложных систем, колебаниях и разрушениях.

**Метод последовательных приближений** – общее название группы математических методов, в которых на каждом очередном **цикле** однообразных вычислений определяются новые значения параметров, более точные, которые в свою очередь используются на следующем цикле.

Например, для правильной оценки ущерба после ДТП центром диагностики автомобиля «Центр 63» [21] проводится промер геометрии кузова (рисунок 2.9). Информация о нескольких тысячах кузовов представлена в виде электронных карт с указанием координат контрольных точек по верхним и нижним частям кузова, при установленных агрегатах и при снятых. Измерительная система автоматически, методом последовательных приближений, совмещает все измеренные точки с эталонными точками в базе данных и моментально отображает всю необходимую информацию на экране компьютера. На основании полученных протоколов измерений, где указано реальное состояние кузова, можно оценивать объем ремонта.

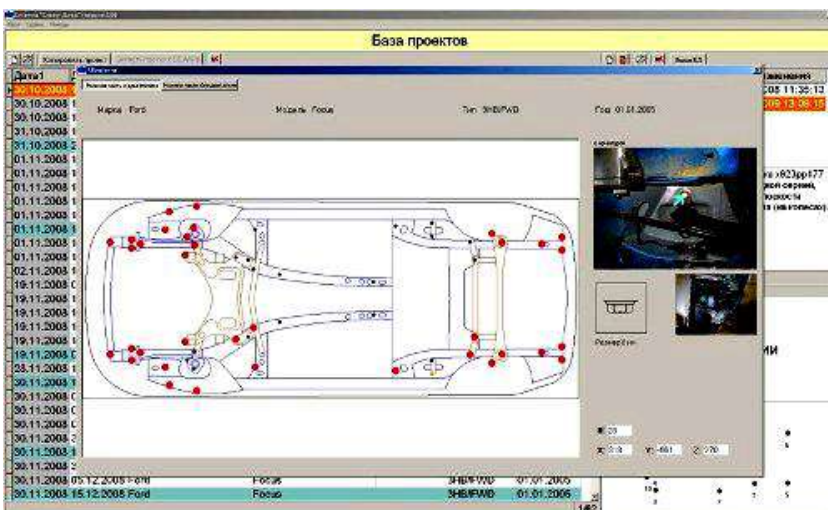


Рисунок 2.9 – Пример оценки ущерба после ДТП

**Метод проб и ошибок** – по результатам одного или нескольких (отличающихся подбираемыми значениями параметров) расчетов делается **вывод о направлении** дальнейшего подбора искомых значений для минимизации ошибки. Также этот метод называют *методом перебора вариантов*. Этот прием для непрерывно распределенных факторов механических систем и процессов, принимающих бесконечное множество значений на любом отрезке своего изменения, не может считаться методом, поскольку не гарантирует получение решения.

Достоинства метода: этому методу не надо учиться; удовлетворительно решаются простые задачи (не более 10 проб и ошибок).

Недостатки метода: плохо решаются задачи средней сложности (более 20–30 проб и ошибок) и практически не решаются сложные задачи (более 1000 проб и ошибок); нет приёмов решения; нет алгоритма мышления; неизвестно, когда будет решение и будет ли вообще; требуются большие затраты времени; иногда этот метод не подходит (не будет человек резать на бомбе провода наугад).

**Метод проверки гипотез** – процесс выдвижения, анализа и проверки разнообразных **предположений** о причинах появления определенного результата. Этот метод имеет смысл применять там, где требуется найти скорее качественное, чем количественное объяснение сложного и неординарного явления.

Пример гипотез возникновения заноса: погодные условия, состояние дорожного полотна, неправильные действия водителя при возникновении опасной ситуации и т. д.

Обзор методов экспертных оценок и многомерный статистический анализ приведен в отдельных главах.

**Подобие и анализ размерностей.** Наиболее распространенным частным случаем математических моделей является случай *подобных моделей*. Два объекта подобны, если выполнены **одновременно два** условия:

- 1) они имеют **одинаковые** математические описания;
- 2) их соответствующие переменные связаны **коэффициентами подобия** (масштабами, константами подобия, коэффициентами пропорциональности).

Еще древние заметили, что величины ведут себя по разному по отношению к арифметическим действиям. Некоторые из них можно складывать, вычитать, умножать и делить, а результат арифметических действий с другими величинами не имеет смысла. Так, например, не имеет смысла сумма длины и времени, зато результат деления длины на время имеет вполне конкретный физический смысл скорости. Сумма длины и ширины прямоугольника, наоборот, имеет смысл полупериметра. Величины, сумма или разность которых имеет физический смысл, назвали **однородными**.

Величины, численное значение которых зависит от принятых единиц измерения, называются размерными. Величины, численное значение которых не зависит от принятых единиц измерения, называются безразмерными. Все известные законы природы описываются с помощью функциональных связей между размерными величинами, поэтому для расчетов необходимо подставлять значения величин вместе с их размерностями.

Порядок и правила применения *размерностей устанавливают системы единиц измерения*. В 1832 г. Гаусс предложил в качестве основных единиц измерения выбирать **независимые** единицы (в совокупности не связанные между собой законами природы), на которых строится вся система. В СИ основными единицами приняты:

- **метр** [м] в качестве меры длины;
- **килограмм** [кг] в качестве меры массы;
- **секунда** [с] в качестве меры времени;
- **ампер** [А] в качестве меры силы электрического тока;
- **кельвин** [°К] в качестве меры термодинамической температуры;
- **моль** [моль] в качестве меры количества вещества;
- **кандела** [кд] в качестве меры силы света.

Кроме этого вводятся дополнительные единицы измерения плоских углов – **радиан** [рад] и телесных углов – **стерадиан** [ср], по сути являющиеся безразмерными.

Исходным положением теории размерностей является то, что все основные законы природы в любой системе единиц измерения описываются степенными комплексами:

$$z = x_1^{y_1} x_2^{y_2} \dots x_n^{y_n},$$

Этот факт нельзя доказать, но он легко проверяется: действительно, законы Ньютона, Кулона, Фарадея и другие описываются именно степенными комплексами. Следует оговориться, что функциональные связи, содержащие знак + или –, не являются основными законами природы, а представляют суперпозицию нескольких независимых природных явлений, каждое из которых в свою очередь выражается степенным комплексом.

Недостающий в критерии подобия безразмерный числовой коэффициент можно определить эмпирически в процессе *идентификации* модели. Таким образом, можно составить недостающие элементы математической модели сложного явления.

**Замечание 1.** Получить с помощью теории размерностей принципиально новые законы природы невозможно. Действительно, для получения критериев подобия необходимо **знать размерности всех** основных определяющих параметров. Так, например, заслуга Джорджа Стокса, получившего выражение для силы трения, действующей на сферические объекты в жидкости, состоит именно в том, что он на основании многолетних экспериментальных исследований умозрительно определил физический смысл и размерность коэффициента динамической вязкости  $\mu$ .

**Замечание 2.** Безразмерный коэффициент  $k$  не зависит от размерных параметров критерия подобия. Поэтому для применения найденного таким образом соотношения в математическом описании необходимо определить коэффициент  $k$  эмпирически в процессе сбора информации для идентификации модели.

**Теория графов.** Идея использования компактных и наглядных схем легла в основу теории графов. Начав с задачи о коммивояжере, современная теория графов позволяет решать задачи сложных систем, менеджмента и программирования.

В *задаче о коммивояжере* требуется найти кратчайший замкнутый маршрут (цикл), проходящий через все назначенные пункты по одному разу. Следует отметить, что к категории транспортных задач относятся задачи менеджмента, например, об оптимальном назначении сотрудников для получения наибольшего эффекта или для минимизации возможных допустимых просчетов, а также задачи распределения ресурсов.

Успехи применения теории графов объясняются тем, что большинство задач в ней доведено до строго обоснованных алгоритмов. Однако решить конкретную практическую задачу значительно проще, чем подобрать пригодное готовое решение обобщенной.

**Теория массового обслуживания.** Теория массового обслуживания изучает модели систем массового обслуживания (СМО), представляющие

собой системы, которые по одному или многим *каналам* обслуживают поступающие в них *заявки*. Примерами СМО могут служить АТС, кассы, диспетчер и т. п.

Заявки в систему массового обслуживания поступают не одновременно, а как-то случайно – распределённо во времени – т. е. случайным потоком. Каждая заявка может быть выполнена за свой собственный интервал времени. В некоторых СМО заявка может попадать в очередь и дожидаться, когда освободится какой-либо канал обслуживания. Таким образом, СМО представляют собой *модели* случайных процессов поступления и обработки заявок. Поток заявок, время их выполнения (обслуживания), условия существования очереди – эти параметры СМО имеют характеристики, описываемые *законами распределения*.

Теория массового обслуживания различает некоторое число **состояний системы** (например, 1 заявка находится на обслуживании в одноканальной системе, а 4 ожидают в очереди). Каждое из них характеризуется вероятностью нахождения системы в этом состоянии. Кроме того, рассматриваются вероятности перехода системы из одного состояния в другое.

Для наглядности представления состояний СМО применяют графы. Например, телефонный номер может быть в одном из двух состояний: свободен или занят. Граф состояний такой СМО изображен на рисунке 2.10.

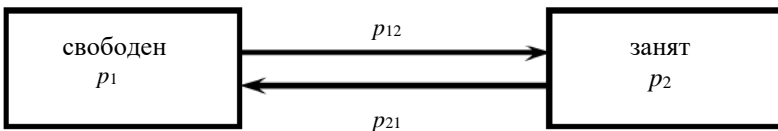


Рисунок 2.10 – Граф состояний СМО

В этом примере  $p_1$  и  $p_2$  задают вероятности того, что номер находится в свободном или занятом состоянии соответственно. Вероятность перехода телефонного номера из свободного состояния в занятое задается величиной

$p_{12}$ , а в обратном направлении  $p_{21}$ . Очевидно, что  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , где  $n$  – число

возможных состояний системы. Это уравнение носит название условия нормировки.

Вероятности переходов определяются *потоком заявок* на обслуживание, поэтому чрезвычайно важно, какие характеристики имеет этот поток.

*Потоком событий* называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени. Поток событий называется стационарным, если он однороден во времени (не зависит от календарного времени). Поток событий называется ординарным, если события в потоке происходят по одиночке, а совместного появления двух и более

событий не происходит. В потоке отсутствует последствие, если события в потоке появляются независимо друг от друга (момент появления следующего события не зависит от момента появления предыдущего).

Поток событий называется простейшим (*стационарным пуассоновским*), если он *стационарен, однороден* и не имеет *последствия*.

Интенсивностью потока  $\lambda(t)$  событий называется среднее число событий в единицу времени ( $\lambda = \text{const}$  – для стационарного потока).

Для *простейшего* потока вероятность того, что за промежуток времени  $\Delta t$  не появится ни одно событие определяется по формуле

$$p(0, \Delta t) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t},$$

где  $\lambda \Delta t$  может трактоваться как среднее число событий на интервале времени  $\Delta t$ .

Для СМО с пуассоновскими потоками заявок и их выполнения применяются математический аппарат марковских случайных процессов.

СМО делятся на два типа: системы с отказами и системы с ожиданием (с очередями). В *системах с отказами* заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получает отказ и пропадает. В *системах с ожиданием* в таком случае заявка становится в очередь и ждет, когда освободится какой-нибудь канал, и сразу поступает в него на обслуживание.

На примере рисунка 2.13 рассмотрим вероятность появления за время  $\Delta t$  одного телефонного вызова:  $p(1, \Delta t) = \mu \Delta t e^{-\mu \Delta t}$ . Здесь  $\mu$  – интенсивность потока "завершения" разговоров по телефону. Для СМО типа телефона в установленном режиме работы можно определить следующие характеристики:

- вероятность соединения с абонентом  $p_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$  ;
- вероятность получить отказ ("занято")  $p_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$  ;
- абсолютная пропускная способность – среднее число обслуженных заявок (разговоров) за единицу времени:  $A = \lambda p_0 \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$ .

Классическим примером СМО с отказами является так называемый процесс гибели и размножения, характеризующийся последовательной цепочкой состояний и возможностью перехода только в *соседние* состояния (рисунок 2.11).

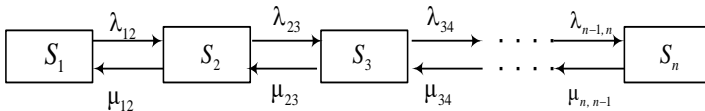


Рисунок 2.11 – Граф состояний СМО



Здесь  $S_i$  – состояния системы;  $\lambda_{i,i+1}$  – интенсивности переходов из низшего состояния в очередное высшее;  $\mu_{i+1,i}$  – интенсивности обратных переходов из высшего состояния в предыдущее низшее.

Предельные вероятности состояний (при  $t \rightarrow \infty$ , в установившемся случае) определяются следующими формулами:

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}} + \dots + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\mu_{21}\mu_{32}\dots\mu_{n,n-1}}}; \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} p_1; \dots; \quad p_n = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\dots\lambda_{n-1,n}}{\mu_{21}\mu_{32}\dots\mu_{n,n-1}} p_1.$$

В классической теории массового обслуживания вероятностные характеристики ( $\lambda$ ,  $\mu$ ) и законы распределения состояний и переходов между ними полагаются пуассоновскими. Если это не так, то их можно определить статистически – наблюдая работу оригинальной системы. В этом случае приходится пользоваться более сложным математическим аппаратом, описывающим процессы перехода системы из состояния в состояние.

Приведем некоторые примеры теории массового обслуживания:

1. В компьютер автомобиля, управляющий различными системами, поступают сигналы от датчиков, связанных с управляемым объектом. Каждый сигнал требует обработки в течение некоторого случайного времени (зависящего от содержания сигнала). Требуется решить задачу: способна ли машина с данным объемом памяти и быстродействием справиться с обработкой всех поступающих сигналов.

2. На улице с высокой интенсивностью транспортного потока установлено светофорное регулирование перекрестка с определенной длительностью фаз. Оценить длину очереди и среднее время ожидания.

3. На техосмотр приезжают автомобили не строго по графику, а со случайными отклонениями. Имеется несколько площадок с соответствующим оборудованием. Спрашивается: чему равно среднее время прохождения техосмотра?

**Метод Монте-Карло.** В тех случаях, когда решение уравнений перехода в СМО затруднено, используется метод статистических испытаний. Этот универсальный метод *стохастического (имитационного)* моделирования позволяет не только определять параметры системы, но и *имитировать* ее работу. *Метод статистических испытаний* (метод Монте-Карло) сводится к *розыгрышу* случайных событий в СМО.

Элементарным примером такого розыгрыша может служить выбор одного из двух исходов с помощью подбрасывания монетки.

Метод Монте-Карло включает в себя три этапа: получение случайного числа  $R$ , отождествление его с вероятностью и розыгрыш единичного жребия.

Случайное число  $R$  – значение случайной величины, равномерно распределенной на интервале  $[0, 1]$ . Такое случайное число можно получить с по-

мощью рулетки, размеченной, например, простыми десятичными дробями – отсюда и название метода Монте-Карло. Сейчас существуют специальные программы – "датчики случайных чисел", которые позволяют при каждом обращении к программе получить "псевдослучайное число" (случайную величину, распределенную *почти* равномерно на  $[0, 1]$ ).

Случайное число ставят в *соответствие* вероятности рассматриваемого события, так как и случайное число, и вероятность принимают значения на интервале  $[0, 1]$ .

В теории вероятностей условились называть *единичным жребием* любой опыт со случайным исходом, который отвечает на один из следующих вопросов:

- "произошло" или "не произошло" определенное событие  $A$ ;
- какое событие из полной группы несовместных событий  $\{A, B, \dots, C\}$  "произошло";
- какое значение "приобрела" случайная величина.

Для ответа на *первый вопрос* единичного жребия необходимо знать вероятность события  $A$ :  $p$ . Тогда, если разыгранное случайное число  $R < p$ , то считают, что событие  $A$  "произошло", если  $R > p$ , то не "произошло" (рисунок 2.12).

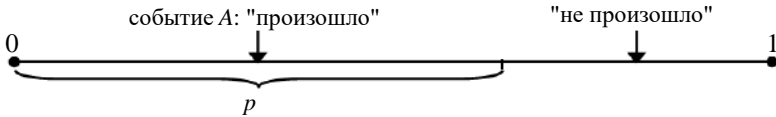


Рисунок 2.12 – Геометрическая интерпретация розыгрыша события  $A$

*Полная группа событий* – это такая группа событий, кроме которых никаких других событий произойти не может. Таким образом, полная группа несовместных событий  $\{A, B, \dots, C\}$  имеет сумму вероятностей, равную единице. Иначе говоря, на интервале  $[0, 1]$  можно выделить последовательность непересекающихся подынтервалов длиной, равной вероятностям этих событий  $p(A), p(B), \dots, p(C)$ . Тогда ответ на *второй вопрос* единичного жребия о том, какое из событий "произошло", делают по тому факту, на какой из подынтервалов попало случайное число  $R$  (рисунок 2.13).

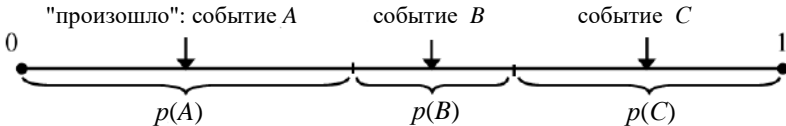


Рисунок 2.13 – Геометрическая интерпретация розыгрыша событий  $A, B, C$

В третьем случае, если случайная величина дискретна, то процедура сводится к предыдущей. Непрерывная случайная величина, как известно, задается законом распределения в виде интегральной функции распределения  $F(x) = P(\xi < x)$ , т. е. вероятности того, что случайная величина  $\xi$  примет значение, не превосходящее  $x$ . Эта функция по своему смысловому содержанию является монотонно возрастающей от 0 до 1 при изменении  $\xi$ , от

нижней до верхней границы области возможных значений. В силу монотонности эту функцию можно обратить однозначно: по заданному значению  $F(x)$  определить единственное значение  $x$ , ему соответствующее. Тогда случайное число  $R$  рассматривают как значение вероятности  $F(x)$  и по нему находят значение  $x$  (рисунок 2.14).

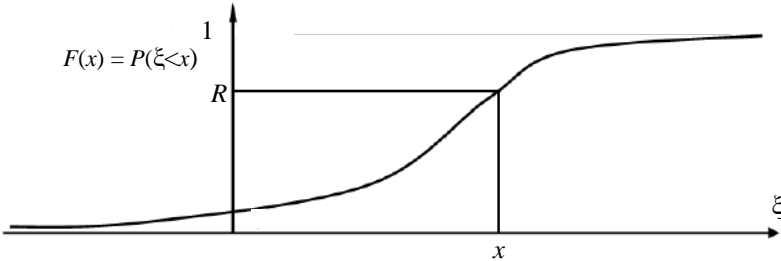


Рисунок 2.14 – Применение интегральной функции распределения вероятности того, что случайная величина  $\xi$  примет значение, не превосходящее  $x$

Имея такой "аппарат" розыгрыша единичного жребия, нетрудно построить цепочку жребиев для реализации случайного явления любой сложности, в том числе и имитации процесса функционирования систем массового обслуживания.

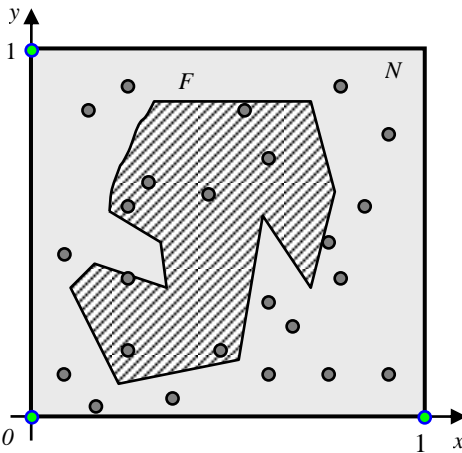


Рисунок 2.15 – Вычисление площади фигуры на плоскости с помощью метода Монте-Карло

связной, т. е. может состоять из нескольких областей; фигура может быть задана аналитически или графически.

Пример применения метода Монте-Карло с помощью вычисления площади фигуры на плоскости.

Пусть дана некоторая плоская фигура  $F$  (рисунок 2.15), для которой требуется найти площадь. Введем следующие предположения: предположим, что эта фигура целиком расположена внутри единичного квадрата; периметр фигуры может быть устроен совершенно произвольно; фигура может не быть связанной, т. е. может состоять из нескольких областей; фигура может быть задана аналитически или графически.

Сгенерируем в квадрате  $N$  случайных точек. Пусть  $N^*$  – количество точек, попавших внутрь рассматриваемой фигуры. Тогда при достаточно больших значениях  $N$  площадь фигуры  $F$  может быть оценена как

$$\hat{S} = \frac{N^*}{N}.$$

Конечно, в задаче вычисления площади существуют и более точные алгоритмы нахождения площади, но данный пример демонстрирует простейший случай применения метода Монте-Карло.

Особенностью имитационных моделей с законами распределения случайных величин, получаемых из наблюдения за оригиналом, является то, что вопрос о проверке *адекватности* отпадает. Имеет смысл проверка адекватности только в том случае, когда используются априорные законы распределения, не полученные статистической обработкой наблюдений.

## 2.3 Вычислительные методы и приемы

### 2.3.1 Вычислительные методы алгебры

В данной главе представлены наиболее распространенные вычислительные методы, используемые для численного решения отдельных задач, встречающихся при математическом моделировании [1], в том числе при анализе и совершенствовании программ анализа и реконструкции ДТП.

**А. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений** достаточно подробно изучаются в курсе высшей математики. Здесь следует упомянуть о необходимости анализа условий *применимости* каждого метода к решению конкретной задачи. Так, например, если в процессе вычисления коэффициентов матрицы системы нельзя гарантировать априори существенно отличное от нуля значение главного определителя системы, то применение правила Крамера или матричного метода невозможно. Наиболее универсальными (однако, тоже с оговорками) являются *методы исключения неизвестных*: различные варианты схем Гаусса, Жордана; а также *итерационные методы*: простой итерации, метод Зейделя и т. п.

**Б. Методы решения нелинейных алгебраических уравнений** вида:  $f(x) = 0$  (или систем нелинейных алгебраических уравнений) обычно строятся на основе итераций – многократных *последовательных приближений*. Общая идея итерационных методов заключается в преобразовании исходной задачи отыскания корня функции  $f(x)$  к итерационному виду:  $x = \varphi(x)$ . Далее строится *итерационный процесс* ("пошаговое уточнение" искомого значения  $x$ ) по формуле  $x^{[i+1]} = \varphi(x^{[i]})$ , где  $[i]$  обозначает номер шага итераций. Такого рода формулы, позволяющие вычислять каждое следующее прибли-

жение, исходя из предыдущего, называются рекуррентными формулами. Возможны различные способы приведения к итерационному уравнению, но для всех итерационных методов формулируются условия сходимости и оценка погрешности. Метод можно применять, только убедившись в выполнении для исходной функции условий сходимости – условий того, что итерационный процесс последовательного приближения сходится именно к решению этого уравнения. Последнее бывает не всегда: неудачно построенный процесс последовательных приближений (не считающийся в математике методом) может сходиться к решению совсем не исходной задачи, а другой, может вообще расходиться или не сходиться ни к какому решению.

Наиболее распространенными итерационными методами решения одного нелинейного уравнения  $f(x) = 0$  являются методы деления отрезка пополам, секущих, золотого сечения, касательных (Ньютона).

Все эти методы применяются только в той области изменения аргумента  $x$ , где безусловно существует единственный корень искомого уравнения. Если корня на этом отрезке нет, то и искать его там бессмысленно – решения нет. Если на отрезке несколько корней, то необходимо разбить его на такие части, которые содержат только по одному корню. Поэтому необходимо заранее убедиться в выполнении этого требования, проанализировав функцию  $f(x)$  на предполагаемом исходном отрезке.

Выбор начального интервала, на котором безусловно существует единственный корень искомого уравнения, называется отделением корней. Указанные условия можно выполнить, опираясь на теорему о монотонной на отрезке функции: всякая монотонная на отрезке функция принимает любое свое промежуточное значение в одной единственной точке внутри отрезка. В этом случае необходимо лишь показать выполнение одновременно двух свойств:

– монотонности на этом интервале функции  $f(x)$ , что проверяется по условию  $f'(x) \neq 0$  или из физических соображений;

– на концах этого отрезка  $x^{[0]}$  и  $x^{[1]}$  функция принимает значения разных знаков (т. е. на одном конце  $f(x^{[0]}) > 0$ , а на другом  $f(x^{[1]}) < 0$ ).

Этим будет гарантировано существование одной единственной точки внутри отрезка, в которой  $f(x) = 0$ .

В итоге процедуры отделения корней получается, что положение корня уравнения известно с точностью до длины выбранного отрезка. Остается построить итерационный процесс таким образом, чтобы на каждой итерации уменьшать отрезок, на котором находится корень.

1. Метод деления отрезка пополам для решения нелинейного алгебраического уравнения применяется на отрезке, для которого приведена процедура отделения корней, и использует итерационное уравнение в виде

$$x^{[i+1]} = 0,5 (x^{[i]} + x^{[i-1]}).$$

Идея этого метода заключается в простейшей процедуре разбиения отрезка на две равные части и исследования, на какой из них находится искомый корень уравнения. Такие дробления и исследования **повторяются на каждой итерации** (рисунок 2.16).

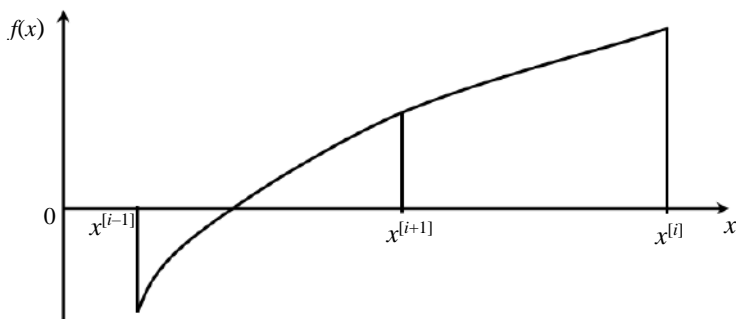


Рисунок 2.16 – Геометрическая интерпретация метода деления отрезка пополам

Поскольку функция монотонна на всем отрезке, то она монотонна и на его части, поэтому на каждом шаге итерации достаточно выбрать тот (вдвое меньший) отрезок, на концах которого выполняются условия  $f(x^{[i+1]}) > 0$  и  $f(x^{[i]}) < 0$ .

Итерации завершают, когда будет выполнено условие *заданной точности*. Это условие, в зависимости от постановки задачи исследований может быть сформулировано одним из двух способов: *по аргументу*  $|x^{[i+1]} - x^{[i]}| < \varepsilon$  (размер интервала стал меньше требуемой погрешности определения корня) или *по функции*  $f'(x^{[i+1]}) < \delta$  (значение функции пренебрежимо мало отличается от нуля).

2. Метод секущих (метод хорд) для решения нелинейного алгебраического уравнения применяется, проводится и завершается аналогично методу деления отрезка пополам (рисунок 2.17).

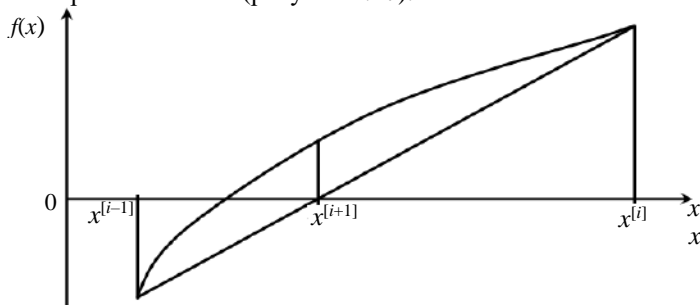


Рисунок 2.17 – Геометрическая интерпретация метода секущих

Единственное его отличие заключается в итерационной формуле для отыскания очередного приближения, которая основана на пропорции для подобных треугольников:

$$x^{[i+1]} = x^{[i]} - \frac{x^{[i]} - x^{[i-1]}}{f(x^{[i]}) - f(x^{[i-1]})} f(x^{[i]}).$$

Этот метод, как видно из формулы, использует для определения очередного приближения больше информации о функции – ее значения, поэтому от него следует априорно ожидать более быстрой сходимости к решению.

3. *Метод золотого сечения* для решения нелинейного алгебраического уравнения применяется, начинается и завершается так же, как и предыдущие методы. Его отличие от них заключается в применении не одной, а двух точек внутри отрезка, используемых для следующего шага итерации.

Золотым сечением отрезка  $[a, b]$  называются две точки:

$$u_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a) \approx a + 0,3811966911(b - a),$$

$$u_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) \approx a + 0,618033989(b - a),$$

расположенные симметрично относительно середины отрезка. Каждая из этих точек делит исходный отрезок на две неравные части таким образом, что **отношение** длины **всего** отрезка к длине **большой** части равняется **отношению** длины **большой** части к длине **меньшей** части:

$$\frac{b-a}{b-u_1} = \frac{b-u_1}{u_1-a}, \quad \frac{b-a}{u_2-a} = \frac{u_2-a}{b-u_2}.$$

На каждом очередном шаге итераций при известных  $x^{[i]}$  и  $x^{[i+1]}$  определяются точки  $u_1$  и  $u_2$  золотого сечения отрезка между точками  $x^{[i]}$  и  $x^{[i+1]}$  и знаки функции в точках золотого сечения:  $f(u_1)$  и  $f(u_2)$  (рисунок 2.18).

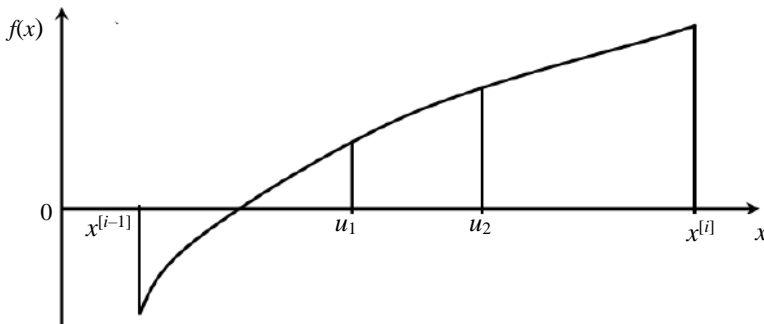


Рисунок 2.18 – Геометрическая интерпретация метода золотого сечения

Для перехода к следующему шагу итерации выбираются те две **ближайшие** друг к другу точки из четырех:  $x^{[i]}$ ,  $x^{[i+1]}$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ , в которых значения функции различаются знаком. Эти точки образуют новый отрезок, на котором находится решение и следует проводить очередное золотое сечение.

Заметим, что метод золотого сечения, как и метод деления отрезка пополам, не использует значений функции: на каждой итерации для выбора отрезка нужны только знаки функции. Поэтому этот метод следует считать, более экономным, чем метод секущих, но сходится он быстрее, чем метод деления отрезка пополам, так как на каждой итерации отрезок уменьшается почти втрое.

Предыдущие сравнения скорости сходимости методов весьма условны, так как этот процесс существенно зависит не только от вида функции, но и от выбора исходного приближения.

*Метод секущих, метод деления отрезка пополам и метод золотого сечения*, а также их модификации удобны тогда, когда функция  $f(x)$  вычисляется относительно просто, а искомый корень – единственный на известном отрезке. В случае, когда еще и производная  $f'(x)$  вычисляется достаточно просто, можно использовать более быстро сходящиеся методы, основанные на информации о производной, например, метод касательных (Ньютона).

4. Для применения метода касательных (метода Ньютона) требуется соблюдение не только прежних условий единственности решения на исходном отрезке, но и дополнительного условия сохранения своего знака второй производной  $f''(x) \neq 0$  (функция не только строго *монотонна* и имеет на концах отрезка значения *разных знаков*, но и выпукла, т. е. метод нельзя применять на интервале, где возможны несколько корней или точки перегиба).

Перед началом метода проводится процедура отделения корня с помощью проверки указанных свойств.

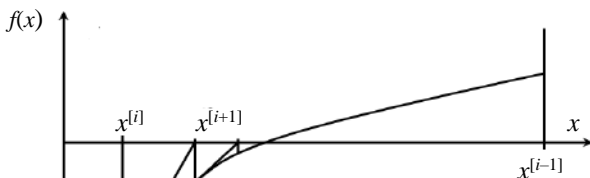


Рисунок 2.19 – Геометрическая интерпретация метода касательных

Итерационная формула имеет вид

$$x^{[i+1]} = x^{[i]} - \frac{f(x^{[i]})}{f'(x^{[i]})},$$

который следует применять к тому концу отрезка, на котором знаки  $f(x)$  и  $f''(x)$  *совпадают* (рисунок 2.19). Если применить ее



неверно, то можно получить следующее "приближение" вне отрезка и метод начнет расходиться. Завершается метод касательных (метод Ньютона) так же, как предыдущие методы.

**В. Методы интерполяции таблично заданных функций** применяются для вычисления значений функции в точках между соседними узлами  $x_k$  и  $x_{k+1}$ , в которых значения функции  $f(x_k)$  и  $f(x_{k+1})$  заданы. Таким образом, интерполяция служит для *доопределения* функции в промежутках между заданными ее значениями в узлах.

Необходимость в такой процедуре возникает при использовании в математических моделях таких характеристик объекта, которые получены экспериментальным или сложным расчетным способом. При этом в зависимости от поставленной задачи могут предъявляться различные специфические требования к свойствам такой интерполяции. Различают следующие методы интерполяции.

1. Кусочно-постоянная интерполяция используется нами повседневно, когда мы говорим, сколько сейчас времени: в течение, например, минуты время считается постоянным (12 часов 27 минут). Графическое представление такой интерполяции приведено на рисунок 2.20.

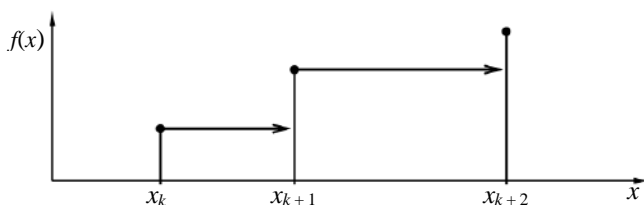


Рисунок 2.20 – Геометрическая интерпретация кусочно-постоянной интерполяции

Кусочно-постоянная интерполяция самая простая, но и обладает самыми примитивными качествами с точки зрения применения в моделировании. Действительно: в каждом узле полученная *интерполяционная функция* терпит разрыв, а разрывная функция применима далеко не во всех задачах.

2. Самая распространенная в расчетах – линейная интерполяция – для нахождения значения функции в точке  $x$ , расположенной между соседними узлами (рисунок 2.21), предполагает *линейный* характер изменения функции.

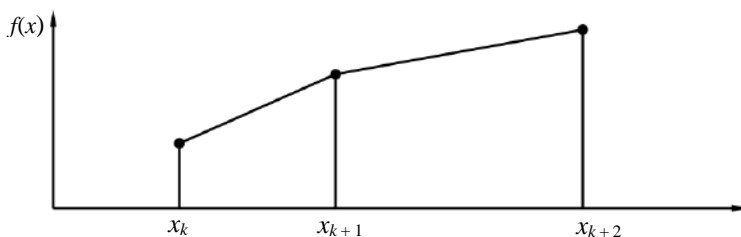


Рисунок 2.21 – Геометрическая интерпретация линейной интерполяции  $x$

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k).$$

Линейная интерполяционная функция непрерывна, однако имеет *разрывы производной* в узлах (представляет собой ломанную, связывающую отрезками прямых все заданные узлы). Поэтому, например, в задачах оптимизации, она неприемлема. Однако для простых расчетных процедур она самая употребительная, ее изучают в средней школе при работе с тригонометрическими функциями по таблицам В. М. Брадиса.

3. Квадратичная интерполяция развивает идею линейной для поиска "удобной" функции. Если одна единственная точка задает лишь одно свое значение (постоянная), а две точки – отрезок прямой (линейная функция), то квадратичная функция, как известно, проходит через три заданные точки. Поэтому для построения квадратичной интерполяционной функции используются три соседних узла таблично заданной функции (рисунок 2.22).

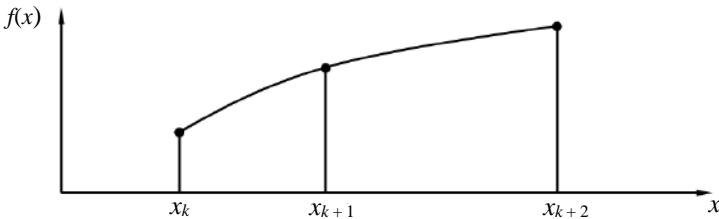


Рисунок 2.22 – Геометрическая интерпретация квадратичной интерполяции

Квадратичная интерполяционная формула получается именно из системы уравнений, описывающих прохождение многочлена второй степени через три точки, заданные соседними узлами:

$$f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) + \frac{\frac{f(x_{k+2}) - f(x_{k+1})}{x_{k+2} - x_{k+1}} - \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}}{x_{k+2} - x_k} (x - x_k)(x - x_{k+1}).$$

При малых изменениях  $x$  – между  $x_k$  и  $x_{k+2}$  – производная такой интерполяционной функции остается непрерывной даже в среднем узле  $x_{k+1}$ . Однако при смене "троек" узлов разрыва производной избежать не удастся.

4. Полиномиальная интерполяция развивает идею использования многочленов (полиномов) до **необходимого** числа узлов. В общем случае через  $n + 1$  точку проходит единственный многочлен степени  $n$ , так как для определения всех его коэффициентов (от свободного члена  $a_0$  до старшего  $a_n$ ) необходимо  $n + 1$  уравнение. Однако обычно вместо процедуры вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена используются готовые интерполяционные формулы, подобные приведенным выше, с помощью которых непосредственно вычисляется значение интерполяционной функции в

любой точке между крайними узлами  $x_0$  и  $x_n$ . Наиболее известной из них является *интерполяционная* формула Лагранжа:

$$f(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} f(x_1) + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})} f(x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{k \neq i}^n (x-x_k)}{\prod_{k \neq i}^n (x_i-x_k)} f(x_i).$$

Нетрудно видеть, что полиномиальная интерполяция, хотя и достаточно громоздка, но обеспечивает сколь угодно *гладкую* функцию – непрерывную вместе со *всеми* производными.

5. Сплайновая интерполяция – интерполяция с помощью таких многочленов (*сплайнов*) на *каждом* участке интерполяции между соседними узлами, которые не только совпадают в определенном числе узлов со значениями заданной функции, но и дают необходимое число непрерывных производных при переходе от одного участка интерполяции к соседнему. Для этого при определении очередного сплайна используют не только значения заданной в узлах функции, но и значения производных предыдущего (например, левого) сплайна в точках сопряжения. Сплайновая интерполяция позволяет достаточно экономным образом получить интерполяционную функцию с заданными свойствами гладкости, что бывает необходимо, например, в задачах оптимизации.

**Г. Методы аппроксимации функций** – методы *приближенной замены* заданной сложной функциональной зависимости более простой функцией (алгебраическим полиномом, тригонометрическим полиномом и другими функциями, которые можно построить с помощью метода наименьших квадратов).

Следует четко различать задачи *интерполяции* и *аппроксимации*. Если интерполяционная функция обязательно совпадает в узлах с заданной, то аппроксимирующая – не обязательно! Последняя чаще всего не проходит вообще ни через одну заданную узловую точку. Аппроксимация нужна для простого вычисления сложных функций или для *сглаживания* (построения гладкой заменяющей функции) таблично заданных функций, чаще всего экспериментальных.

Простейшей аппроксимационной формулой является известная формула Тейлора, приближенно отражающая поведение известной функции в окрестности единственной точки с учетом необходимого числа производных.

Если зависимость имеет явно выраженный характер ограниченной на отрезке или периодической функции, то может быть использована аппроксимация **тригонометрическими** функциями (конечной частью ряда Фурье).

### 2.3.2. Вычислительные методы решения дифференциальных уравнений

Численные *методы интегрирования* обыкновенных *дифференциальных уравнений* и их систем вида  $y' = f(x, y)$  можно построить только для случая известных начальных значений всех интегрируемых переменных (для задачи Коши). Общее решение дифференциальных уравнений содержит произвольные постоянные, которые недопустимы в математических моделях, поэтому в качестве искомой функции используется определенное начальными условиями частное решение.

Эти вычислительные методы основаны на замене дифференциальных уравнений алгебраическими. Операцию взятия производной невозможно представить в компьютерных программах, поэтому производная заменяется *разностным* выражением того или иного вида. В зависимости от этого вида различаются *разностные схемы* численного представления дифференциальных уравнений и соответствующие им методы.

1. Методы Эйлера. Простейший метод Эйлера основан на аппроксимации производной простейшей разностной схемой вида

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Отсюда в силу решаемого дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  выводится разностное уравнение метода  $y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \Delta x$ .

Рисунок 2.23 дает геометрическое представление об этом методе: в силу вида исходного дифференциального уравнения функция  $f(x_k, y_k)$  представляет собой значение производной в левом конце интервала  $\Delta x$ , называемого шагом интегрирования. Тогда разностное уравнение метода Эйлера просто описывает выходящую из левого конца шага интегрирования касательную к неизвестной искомой интегральной кривой (изображенной пунктиром).

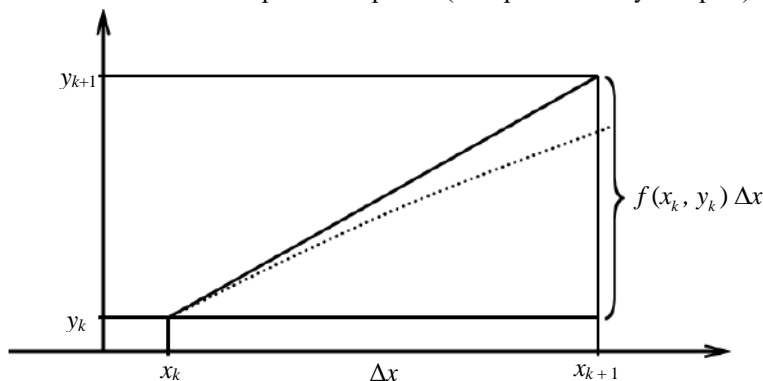


Рисунок 2.23 – Геометрическая интерпретация метода Эйлера

Очевидно, что небольшую неизбежную погрешность при такой аппроксимации можно обеспечить только малым шагом интегрирования  $\Delta x$ . Поэтому численное решение задачи Коши на достаточно большом промежутке изменения аргумента – очень кропотливая процедура, немислимая без вычислительной техники.

Простейший метод Эйлера относится к методам I порядка, поскольку использует в разностной формуле значение функции в *одной* точке.

Заметим попутно, что приведенная выше разностная схема аппроксимации производной не единственно возможная, например, схема I порядка

$$y' \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \quad \text{и схема II порядка} \quad y' \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}}$$

имеют такое же право на аппроксимацию производной, однако интегрирование с их помощью обладает рядом особенностей.

Простейший метод Эйлера на практике почти не используется. Наибольшее распространение получили модифицированные методы Эйлера II порядка. Идея первой модификации заключается в выполнении шага интегрирования за *два полушага* и дает уравнение:

$$y_{k+1} = y_k + f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, y_k + f\left(x_k, y_k\right) \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x.$$

Идея второй модификации заключается в выполнении *предварительного шага* интегрирования и поправки на касательную в конце шага:

$$y_{k+1} = y_k + 0,5 \Delta x \left[ f(x_k, y_k) + f(x_k + \Delta x, y_k + f(x_k, y_k) \Delta x) \right].$$

Общими недостатками методов Эйлера I порядка являются *невысокая точность* и *слабая устойчивость* (погрешность одного шага интегрирования не только не компенсируется на последующих шагах, а растет). Например, для интегрирования уравнений динамики полета транспортных самолетов в условиях, близких к установившимся, с практической точки зрения допустимо пользоваться простейшим методом Эйлера. Но при исследовании неустановившихся режимов полета этого недостаточно – следует применять модифицированные методы Эйлера, а для моделирования движения самонаводящихся ракет использование методов Эйлера практически недопустимо.

2. Методы Адамса используют значения функции в нескольких предыдущих точках (учитывают предысторию поведения функции:  $y_{k-1} \dots$ ) для исправления направления касательной. Формула метода Адамса I порядка совпадает с формулой простейшего метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \Delta x,$$

а формулы более высокого порядка строятся наращиванием формул меньшего порядка:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \Delta x + [f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})] 0,5 \Delta x - \text{II порядка};$$

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \Delta x + [f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})] 0,5 \Delta x + \\ + [f(x_k, y_k) - 2f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_{k-2}, y_{k-2})] \frac{5}{12} \Delta x - \text{III порядка}.$$

Методы Адамса более *устойчивы*, чем методы Эйлера, а точность их растет с увеличением порядка. Трудоемкость расчетов по сравнению с другими методами такого же порядка (см. ниже) значительно меньше, так как используются значения функции, вычисленные ранее на предыдущих шагах интегрирования. Существенным неудобством методов Адамса является необходимость на первых шагах интегрирования использовать другие методы, поскольку значения функции в "предыдущих" точках не определены.

3. Методы "прогноз-коррекция" осуществляют расчет в два шага: предварительный расчет  $y_{k+1}^{\text{II}}$  – "прогноз" ("предсказание") и последующее уточнение – "коррекцию"  $y_{k+1}^{\text{K}}$ . Для построения формул метода "прогноз-коррекция" определенного порядка используются формулы *метода Адамса* того же порядка, например, для простейшего метода I порядка:

$$y_{k+1}^{\text{II}} = y_k + f(x_k, y_k) \Delta x - \text{"предсказание"},$$

$$y_{k+1}^{\text{K}} = y_{k+1}^{\text{II}} + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{\text{II}}) \Delta x - \text{"коррекция"}.$$

Геометрическая интерпретация этого метода I порядка показана на рисунке 2.24.

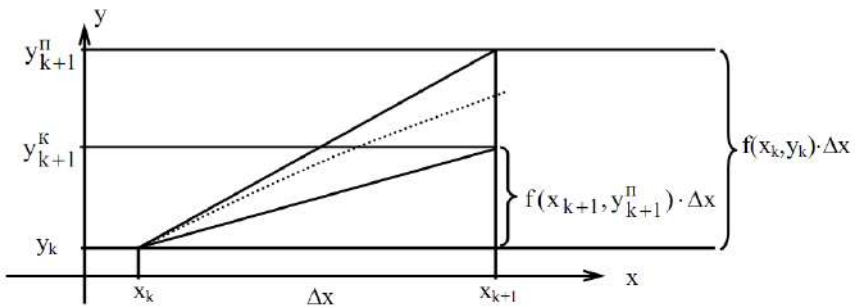


Рисунок 2.24 – Геометрическая интерпретация метода "прогноз-коррекция"

При предсказании, как и при методе Эйлера (рисунок 2.26), решение разностного уравнения на шаге отклоняется от точного решения в сторону *выпуклости* функции, так как строится с помощью касательной *в начале шага*. В свою очередь коррекция приводит к отклонению в сторону *вогнутости*, так как строится с помощью прямой, проведенной из той же исходной точки шага, но с наклоном, соответствующим наклону касательной *в конце шага*. Таким образом, разность между  $y_{k+1}^{\Pi}$  и  $y_{k+1}^{\text{K}}$  может служить мерой погрешности численного интегрирования на одном шаге. То есть методы "прогноз-коррекция" выгодно отличаются от ранее описанных методов тем, что допускают *контроль* величины погрешности на каждом шаге интегрирования. Это можно использовать для повышения точности расчетов с помощью уменьшения шага или для экономии времени расчетов с помощью увеличения шага  $\Delta x$ .

Для всех разностных методов справедливо утверждение: чем меньше  $\Delta x$ , тем меньше погрешность на шаге, тем выше точность интегрирования дифференциальных уравнений. Однако нельзя заранее сказать, какова должна быть величина  $\Delta x$  для обеспечения заданной точности. Поэтому расчеты с неприемлемой погрешностью просто идут "в корзину". В отношении этого выгодно отличаются разностные методы, которые позволяют не только контролировать погрешность, но и *изменять шаг в процессе* интегрирования. Этим последним удобством обладают все разностные методы I порядка, но из них только метод "прогноз-коррекция" дает возможность проконтролировать погрешность и подсказать, когда возникает необходимость изменения шага. Из методов более высокого порядка предоставляют возможность изменения шага интегрирования методы Эйлера и Рунге-Кутта.

4. Методы Рунге-Кутта  $m$ -го порядка используют  $m$  внутренних точек шага интегрирования, которые задаются характерным для определенной модификации этого метода способом и в которых *последовательно* вычисляются  $m$  значений функции:

$$k_1 = f(x_k^{(1)}, y_k); \quad k_2 = f\left(x_k^{(2)}, y_k + k_1(x_k^{(1)} - x_k^{(2)})\right); \dots$$

$$k_m = f\left(x_k^{(m)}, y_k + k_{m-1}(x_k^{(m)} - x_k^{(1)})\right),$$

а затем производится непосредственно сам шаг интегрирования:

$$y_{k+1} = y_k + \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i k_i \right) \Delta x.$$

Простейший метод Рунге-Кутта I порядка ( $m = 1$ ) – это метод Эйлера. Наиболее *распространенный* в программном обеспечении алгоритмических языков – "стандартный" метод Рунге-Кутта IV порядка использует 4 значе-



ния функции, вычисленные для двух промежуточных точек на шаге (в середине) и обеих крайних, и соответствующий набор коэффициентов  $\alpha_i$ :

$$k_1 = f(x_k, y_k); \quad k_2 = f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + k_1 \frac{1}{2}\Delta x\right);$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + k_2 \frac{1}{2}\Delta x\right); \quad k_4 = f\left(x_k + \frac{1}{2}\Delta x, y_k + k_3 \frac{1}{2}\Delta x\right);,$$

$$y_{k+1} = y_k + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \frac{1}{6}\Delta x.$$

Наиболее экономичным из методов Рунге-Кутты является метод II порядка следующего вида:

$$k_1 = f(x_k, y_k); \quad k_2 = f(x_k + \Delta x, y_k + k_1 \Delta x); \quad y_{k+1} = y_k + (k_1 + k_2) \frac{1}{6}\Delta x,$$

который по форме совпадает со вторым из приведенных выше модифицированных методов Эйлера.

Все методы Рунге-Кутты отличаются *устойчивостью* и возможностью *контроля погрешности* и *изменения шага* интегрирования. Однако по сравнению с методами Адамса того же порядка данные методы менее экономны, поскольку вычисленные для одного шага интегрирования значения функции нигде больше не используются. Поэтому применение методов Рунге-Кутты высоких порядков оправдано только тогда, когда необходима высокая точность или когда значения функции вычисляются сравнительно просто.

### 2.3.3 Приемы контроля математических моделей

Разработка математических моделей – трудоемкий процесс, сопряженный с подбором частных согласованных моделей, адекватных в своих областях, с идентификацией по результатам эксперимента. Поэтому такой дорогостоящий продукт нуждается в постоянном контроле на всех стадиях разработки. К основным приемам контроля математических моделей можно отнести следующие.

1. *Контроль размерностей* позволяет избежать несогласованностей в формулах основных законов природы и закономерностей объекта и подготовить их к применению в алгоритмах для вычислительной техники. Для контроля размерностей следует соблюдать три правила:

- знаки +, -, <, >, ≤, ≥, = могут связывать величины только одной размерности;
- аргументами трансцендентных функций должны быть безразмерные

величины;

– во всех расчетных формулах следует применять одну систему единиц измерения.

Так, например, в выражении  $e^{\alpha t}$  показатель степени должен быть безразмерным: т. е.  $\alpha$  и  $t$  безразмерны или имеют взаимно обратные размерности. В эмпирических формулах коэффициенты должны иметь размерность. Внесистемные единицы измерения следует перевести в применяемую систему.

2. *Контроль основных законов природы*, прежде всего законов сохранения, необходим в моделях, не претендующих на всеобъемлющее описание оригинала, или в моделях, использующих численные методы вычисления.

3. *Контроль качественного поведения зависимостей* необходимо проводить во всех тех случаях, когда о промежуточных результатах можно что-либо сказать. Проверку качественного поведения *на контрольных примерах*, как правило, для всей модели или для ее законченных частей, имеющих самостоятельное значение и смысл. В любом случае о поведении оригинала должна иметься достоверная информация, как для оценки адекватности, хотя, может быть, и неполная. Используются три вида контрольных примеров: простейшие случаи, случаи особого поведения (например, резонанс) и наиболее общие случаи, исследованные в специальных экспериментах. В отличие от задачи идентификации проверка на контрольных примерах дает лишь общий вывод о качественной правильности модели.

4. *Контроль математической замкнутости* задачи, т. е. соответствие количества уравнений количеству неизвестных. Действительно, без этого просто невозможно "решить задачу".

### **Контрольные вопросы**

- 1 Укажите основные виды математических моделей.
- 2 Что понимают под адекватностью математических моделей?
- 3 Приведите алгоритм научных исследований с помощью компьютерного моделирования.
- 4 Опишите основные методы разработки математических моделей.
- 5 Назовите методы решения дифференциальных уравнений, применяемые в компьютерных программах?

# 3 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

## 3.1 Основы теории вероятностей

Приступая к изучению реально существующего объекта, мы сталкиваемся с вопросом: какая информация и в каком виде нам необходима. Любой изучаемый объект многообразен. Число факторов, влияющих на него, бесконечно. Проявления этих факторов могут быть неоднозначны или случайны. Как выбрать основное? Общие соображения для ответа на этот вопрос может дать четко сформулированная цель исследований. Такие соображения можно назвать *постановкой задачи отбора информации*.

Более конкретное представление о наборе рассматриваемых факторов может быть получено только в результате нескольких *последовательных* приближений эксперимента. При этом для достижения даже четко сформулированной цели исследований не всегда ясно, когда можно остановиться, а когда необходимо углублять свое представление об изучаемом объекте, с какой точностью и как необходимо регистрировать данные наблюдений.

Было бы очень кстати иметь аппарат для **строгого обоснования отбора информации**.

Таким образом, прослеживается аналогия между объектом наблюдения и зарегистрированными результатами, с одной стороны, и понятиями генеральной совокупности и выборки, с другой. То есть можно почерпнуть недостающий исследовательский аппарат из математической статистики.

Удобное представление результатов расчетов и экспериментов подразумевает не только компактность, но и информативность, а также возможность получения *достоверных* выводов по результатам анализа, т. е. *адекватных моделей*. Это понятие достоверности опять приводит нас к необходимости применения *статистических методов* для отбора и обработки информации.

### 3.1.1 Необходимые сведения из теории случайных событий

Для количественной оценки различных показателей исследуемого объекта используют понятия случайного события, случайной величины и случайного процесса.

Элементарным исходом  $\omega$  называется любой мысленно возможный неразложимый результат вероятностного эксперимента  $E$ .

Множество всех мыслимых взаимоисключающих результатов вероятностного эксперимента  $E$  образуют пространство элементарных событий  $\Omega$ .

*Случайным* называется такое событие, о котором нельзя заведомо точно сказать: произойдет оно или нет. Например: занос автомобиля на скользкой дороге; совпадение плохой освещенности дороги и дождливой погоды; отказ выключателя при возникновении короткого замыкания в электропро-

водке и т. д. Такие события обладают какой-то степенью возможности: одни – большей, другие – меньшей. Чтобы количественно сравнивать между собой события по *степени их возможности*, нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие (его вероятность).

*Вероятностью случайного события* (СС)  $A$  называется функция  $P(A)$ , характеризующая меру объективной (не зависящей от воли исследователя) возможности наступления этого события и удовлетворяющая для каждого СС трём аксиомам (Колмогорова):

- 1) вероятность удовлетворяет неравенству  $0 \leq P(A)$ ;
- 2) вероятность появления достоверного события равна 1, т. е.  $P(\Omega) = 1$ ;
- 3) вероятность суммы счётного множества попарно несовместных событий  $A_i$ ,  $i = 1, \infty$  равна сумме вероятностей этих событий. То есть  $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$ .

По классическому способу вычисления вероятности вероятность СС  $A$  [ $P(A)$ ] равна отношению числа элементарных исходов  $m$ , благоприятных событию  $A$ , к общему количеству элементарных исходов  $n$  пространства  $\Omega$ , т. е.  $P(A) = m / n$ , а учитывая, что  $A$  и  $\Omega$  – множества (элементарных исходов), можно записать:  $P(A) = |A| / |\Omega|$ .

Ограничения классического способа вычисления вероятности: все элементарные исходы вероятностного эксперимента  $E$  должны быть равновероятными, т. е.  $P(\omega_i) = P(\omega_j)$ ,  $\forall i, j$ ; количество элементарных исходов (размерность пространства  $\Omega$ ) ограничено или счётно.

При одновременном изучении двух или нескольких событий различают события совместные и несовместные. Несовместными называются события, произведение которых является пустым множеством, т. е. невозможным событием. На практике это означает, что несовместные события вместе произойти не могут. События называются совместными, если они могут произойти одновременно. Пример совместного события – одновременный отказ двух и более элементов в один и тот же момент времени в относительно простой последовательной схеме.

Несколько событий образуют *полную группу событий*, если в результате опыта обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

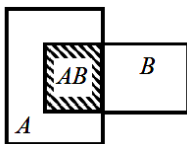


Рисунок 3.1 – Иллюстрация совместности двух событий (диаграмма Венна)

**Теорема сложения вероятностей.** Пусть  $A$  и  $B$  – произвольные случайные события, принадлежащие  $\Omega$ , тогда вероятность суммы этих событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного по-

явления (рисунок 3.1), т. е.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Вероятность суммы  $n$  несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i),$$

где  $A = \sum_{i=1}^n A_i$ .

Вероятность суммы любого числа событий

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j A_k) - \dots (-1)^{n-1} \sum P(A_i A_j \dots A_n).$$

Событие  $B$  называется зависимым от события  $A$ , если появление (или не появление) события  $A$  изменяет вероятность появления события  $B$ . Если происхождение  $A$  не изменяет вероятности появления  $B$ , событие  $B$  называется независимым от события  $A$ .

**Теорема умножения вероятностей.** Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, в предположении, что первое уже произошло:  $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B)$ . При этом не важно, какое из событий считать первым, а какое вторым.

В общем виде

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

**Пример.** Вероятность выхода из строя спидометра равна  $p$ . Для повышения надёжности в прибор поставлены  $m$  дублирующих ветвей. Определить, во сколько раз ( $k$ ) увеличится надёжность прибора, если под надёжностью понимать вероятность безотказной работы.

*Решение.* Вероятность того, что откажут все параллельные ветви (событие  $A$ ):

$$P(A) = \prod_{i=1}^m p_i = p^m.$$

Вероятность того, что не откажет хотя бы одна из параллельных ветвей (событие  $B$ ):  $P(B) = 1 - P(A) = 1 - p^m$ .

Надёжность одной ветви  $r = 1 - p$ .

Искомое увеличение надёжности прибора

$$k = \frac{P(B)}{r} = \frac{1 - p^m}{1 - p}.$$

*Дополнение.* При относительно малых вероятностях повреждений, которые характерны для элементов ЭЭС, например при  $p = 0,01$ ,

$$k_2 = \frac{1 - (0,01)^2}{1 - 0,01} = 1,01, \quad k_3 = \frac{1 - (0,01)^3}{1 - 0,01} = 1,0101.$$

**Формула полной вероятности.** Пусть требуется определить вероятность некоторого СС  $A$ , которое может произойти или не произойти вместе

с некоторой из гипотез  $H_1, H_2, \dots, H_n$ . Тогда вероятность указанного события можно вычислить по формуле  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)$ , т. е. как сумму произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность СС  $A$  при этой гипотезе.

**Пример.** Светодиодные светофоры закупаются на трех заводах. Предположим, что вероятность выпуска первым заводом равна 0,6, вторым – 0,3, третьим – 0,1.

Вероятности того, что при определённых условиях работы изделие сохранит работоспособное состояние, для первого, второго и третьего заводов соответственно равны: 0,99; 0,98; 0,97. Чему равна вероятность того, что поступивший светофор сохранит работоспособное состояние?

*Решение.* Обозначим событие  $A$  – поступивший светофор сохранит работоспособное состояние. Это изделие может оказаться с первого завода (событие  $H_1$ ), второго ( $H_2$ ) или третьего ( $H_3$ ). Интересующее нас событие  $A$  имеет вероятность

$$P(A) = \sum_1^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0,6 \cdot 0,99 + 0,3 \cdot 0,98 + 0,1 \cdot 0,97 = 0,985.$$

**Теорема гипотез (формула Байеса).** Произведён опыт, в результате которого наблюдалось событие  $A$ , которое может произойти или не произойти вместе с одной из гипотез  $H_1, H_2, \dots, H_n$ . Причём известны априорные (т. е. до опытные) вероятности этих гипотез –  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ . Пусть известно, что событие  $A$  произошло. Требуется определить вероятности событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$  после опыта. На основании теоремы умножения и формулы полной вероятности имеем

$$P(H_i|A) = (P(H_i) P(A|H_i)) / (\sum [P(H_i) P(A|H_i)]).$$

### 3.1.2 Случайные величины и законы их распределения

Если случайные события характеризуют результат вероятностного эксперимента качественно (событие может произойти или нет), то случайные величины – количественно. Например, безотказная работа некоторого устройства в течение гарантийного срока – случайное событие, а время наработки устройства на отказ – случайная величина.

**Случайной величиной** называется функция  $\xi = \xi(\omega)$ , которая каждому элементарному исходу  $\omega$  пространства элементарных событий  $\Omega$  вероятностного эксперимента  $E$  ставит в соответствие некоторое действительное число  $x$ .

В зависимости от размерности пространства элементарных исходов  $\Omega$  вероятностного эксперимента случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

*Непрерывной* называется случайная величина  $\xi$ , которая в результате эксперимента может принимать все значения из некоторого промежутка или всей числовой оси. Множество значений непрерывной случайной величины, соответствующее пространству  $\Omega$ , несчетно. Примерами непрерывных случайных величин являются: время безотказной работы элементов, устройств,

агрегатов, систем; время вынужденного простоя оборудования из-за отказов; уровень того или иного технического параметра и т. д.

*Дискретной* называется случайная величина  $\xi$ , которая в результате эксперимента может принимать только определенные изолированные друг от друга значения. Множество значений дискретной случайной величины конечно или счетно. Примерами дискретных случайных величин являются: число неисправных элементов, устройств, агрегатов из общего числа находящихся в эксплуатации; число дефектных изделий в какой-либо партии продукции; количество повреждений элементов какого-либо оборудования в единицу времени и т. д.

Случайная величина будет полностью определена с вероятностной точки зрения, если мы укажем, с какой вероятностью наступает каждое из случайных событий  $\{\xi = x_i\}$ . Этим мы установим так называемый закон распределения случайной величины  $\xi$ .

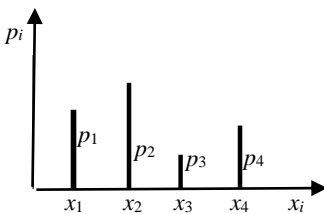
*Законом распределения* случайной величины  $\xi$  называется правило, которое каждому возможному значению  $x$  величины  $\xi$  ставит в соответствие вероятность появления данного значения. Закон распределения полностью характеризует случайную величину  $\xi$  с вероятностной точки зрения, т. е. определяет множество значений, которое может принимать величина, и то, с какими вероятностями величина  $\xi$  принимает значения  $x_1, x_2, \dots$ .

Закон распределения случайной величины  $\xi$  может быть задан таблично, графически и аналитически. Непосредственное перечисление значений возможно только для дискретных случайных величин, множество которых конечно или счётно.

*Рядом распределения* называется таблица, в которой непосредственно указаны возможные значения случайной величины  $\xi$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) и соответствующие им вероятности (таблица 3.1).

**Таблица 3.1 – Ряд распределения дискретных случайных величин**

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	...
$P(\xi = x_i)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$	...



**Рисунок 3.2 – Графический способ задания закона распределения**

Для наглядности закон распределения дискретных величин можно представить графически. По оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности данных значений (рисунок 3.2).

Табличный и графические способы задания законов распределения применимы только к дискретным случайным величинам.

Функцией распределения случайной величины  $\xi$  называется функция  $F(x)$  действительного аргумента  $x$ , которая каждому значению аргумента  $x$  ставит в соответствие вероятность того, что величина  $\xi$  примет значение меньше  $x$ , т. е. вычисляет вероятность события  $\{\xi < x\}$ .

Таким образом,  $F(x) = P(\xi < x)$ .

Функция плотности распределения непрерывной случайной величины – первая производная от функции распределения:

$$f(x) = F'(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Вероятностный смысл функции  $f(x)$  заключается в том, что она указывает как часто возможные значения непрерывной случайной величины  $\xi$  группируются в окрестности точки  $x$ .

Случайные величины в вероятностном смысле полностью характеризуются законами распределения. Однако на практике знание закона распределения случайной величины часто оказывается излишним. Иногда бывает достаточным знать лишь отдельные числовые параметры, характеризующие существенные черты закона распределения исследуемой случайной величины или некоторые её характерные значения.

Характеристики, выражающие в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайной величины, называются *числовыми характеристиками* случайной величины. Все числовые характеристики случайных величин разделяют на характеристики положения, рассеяния, характеристики асимметрии и эксцесса (таблица 3.2) [11].

Таблица 3.2 – Числовые характеристики случайных величин

Числовые характеристики случайных величин			
положения	рассеяния	асимметрии	эксцесса
Математическое ожидание	Среднеквадратическое отклонение	Коэффициент асимметрии	Коэффициент эксцесса
Мода	Дисперсия		
Медиана			

Математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  называется число  $M[\xi]$ , характеризующее среднее значение случайной величины с учётом вероятностей её значений.

Математическое ожидание дискретной случайной величины  $\xi$  вычисляется по формуле  $M[\xi] = \sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x_i)$ , а непрерывной случайной величины – по

формуле  $M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$

Мода – наиболее вероятное значение случайной величины  $\xi$ , обозначаемое  $Mod[\xi]$ .



*Медианой* называется значение случайной величины  $\xi$ , обозначаемое  $Med[\xi]$ , для которого равновероятно случайная величина  $\xi$  примет большее или меньшее значение, т. е.  $P(\xi < Med[\xi]) = P(\xi > Med[\xi]) = 0,5$ . Поэтому медиану называют средневероятным значением случайной величины.

*Дисперсией* случайной величины  $\xi$  называется число  $D[\xi]$ , характеризующее меру рассеяния значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. Дисперсию дискретной случайной величины удобно определять по формуле

$$D[\xi] = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(\xi = x_i) - M^2[\xi];$$

для непрерывной случайной величины

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2[\xi].$$

*Среднеквадратическим отклонением* случайной величины  $\xi$  называется число  $\sigma[\xi]$ , равное положительному значению квадратного корня из дисперсии, т. е.  $\sigma[\xi] = +\sqrt{D[\xi]}$ . Таким образом, среднеквадратическое отклонение случайной величины имеет размерность, равную размерности самой случайной величины. Среднеквадратическое отклонение  $\sigma[\xi]$ , как и дисперсия  $D[\xi]$ , характеризует степень разброса значений случайной величины  $\xi$  вокруг ее математического ожидания  $M[\xi]$ .

*Коэффициент вариации* – число, характеризующее, насколько хорошо математическое ожидание представляет ряд её возможных значений. Вычисляется по формуле  $V[\xi] = \sigma[\xi] / M[\xi]$ .

*Коэффициентом асимметрии* (скошенности) распределения называется число, вычисляемое по формуле

$$\beta_1[\xi] = \frac{M[(\xi - M[\xi])^3]}{\sigma^3}.$$

*Коэффициентом эксцесса* случайной величины  $\xi$  называется число  $\beta_2[\xi]$ , характеризующее островершинность распределения случайной величины  $\xi$  по сравнению с нормальным распределением и определяемое по формуле

$$\beta_2[\xi] = \frac{M[(\xi - M[\xi])^4]}{\sigma^4} - 3.$$

**Некоторые распределения случайных величин. Биномиальное распределение.** Говорят, что случайная величина  $\xi$  имеет биномиальный закон распределения, т. е.  $\xi \sim Bi(n, p)$ , если данная величина дискретна и определяет число успехов  $k$  в схеме  $n$  испытаний Бернулли. Очевидно, что случайная величина  $\xi$ , имеющая биномиальное распределение, принимает только целые значения на отрезке  $[0, n]$  с вероятностями, определяемыми формулой Бернулли:  $P_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ .

Биномиальное распределение характеризуется двумя параметрами: числом проводимых экспериментов  $n$  и вероятностью успеха  $p$  в каждом испытании. Примерами СВ, имеющей биномиальное распределение, является число бракованных сварных швов автомобиля.

Основные числовые характеристики случайных величин, распределенных по биномиальному закону, определяются следующими выражениями:

$$M[\xi] = np; \quad D[\xi] = np(1 - p).$$

**Пример.** На диспетчерском пункте ГАИ работает четыре однотипных компьютера. Вероятность отказа в работе программного обеспечения каждого из них  $p = 0,03$ . Составить ряд распределения вероятного числа отказов программного обеспечения компьютеров.

*Решение.* Число повреждённых компьютеров является дискретной случайной величиной. Пользуясь формулой Бернулли для биномиального распределения  $P_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ , приведем результаты расчетов в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Ряд распределения дискретных случайных величин

Число повреждённых компьютеров	0	1	2	3	4
Вероятность $P(\xi = x_i)$	0,9606	0,1164	0,0053	0,00011	0,00000081

**Геометрическое распределение.** На практике геометрическое распределение возникает при следующих условиях: пусть производится серия независимых опытов, в каждом из которых может произойти событие  $A$  с одной и той же вероятностью  $p$ . Опыты продолжаются до первого появления события  $A$ . Тогда случайная величина  $X$ , определяющая *число неудач, предшествующих успеху*, распределена по геометрическому закону.

Возможные значения этой случайной величины:  $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ , а вероятность каждого из этих значений определяется по формуле

$$P(X = m) = q^m p,$$

где  $0 \leq p \leq 1; q = 1 - p; m = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ .

Для случайной величины, распределенной по геометрическому закону,

$$M[X] = \frac{1}{1-p}, \quad D[X] = \frac{1-p}{p^2}, \quad \sigma[X] = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}, \quad \text{mod}[X] = 0.$$

**Пример.** Вероятность изготовления нестандартного изделия при некотором технологическом процессе равна 0,06. Контролер из отдела технического контроля берет из партии изделие и сразу проверяет его качество. Если оно оказывается нестандартным, то дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, то контролер проверяет следующее изделие и т. д. Записать закон распределения случайной величины  $X$  – числа стандартных изделий, проверенных до выявления брака.

*Решение.* Условие задачи соответствует проведению независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью  $p=0,06$  может осуществиться событие  $A = \{\text{обнаружено нестандартное изделие}\}$ . В этом случае *неудача* – обнаружение стандартного изделия, *успех* – обнаружение нестандартного изделия. Случайная величина  $X$  – число стандартных изделий, проверенных до выявления брака, распределена по геометрическому закону. Возможные значения этой случайной величины:  $0, 1, 2, 3, \dots, m, \dots$ . По условию  $p = 0,06, q = 1 - 0,06 = 0,94$ .

Вероятности значений определяются по формулам:

$P(X=0) = q^0 p = 0,94^0 \cdot 0,06 = 0,06$  (то есть нестандартное изделие будет обнаружено сразу же при проверке первого изделия, при этом число стандартных изделий, *проверенных до появления брака*, будет равно 0);

$P(X=1) = q^1 p = 0,94 \cdot 0,06 = 0,0564$  (то есть нестандартное изделие будет обнаружено при проверке второго изделия, при этом число стандартных изделий, *проверенных до появления брака*, будет равно 1) и т. д.

Закон распределения случайной величины  $X$  можно записать в виде

$$P(X = m) = 0,94^m \cdot 0,06.$$

**Распределение Пуассона.** Если в схеме Бернулли число испытаний бесконечно велико ( $n \rightarrow \infty$ ), а вероятность успеха в каждом испытании стремится к нулю ( $p \rightarrow 0$ ) таким образом, что  $np = \lambda = \text{const}$ , то вероятность появления в схеме  $n$  испытаний Бернулли ровно  $k$  успехов определяется предельной теоремой Пуассона  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ . В данном случае говорят,

что случайная величина  $\xi$ , определяющая число успехов  $k$  в схеме  $n$  испытаний Бернулли, имеет Пуассоновский закон распределения, т. е.  $\xi \sim \Pi(\lambda)$ .

Таким образом, закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона распределения при  $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np = \lambda = \text{const}$ .

Очевидно, что распределение Пуассона характеризуется единственным параметром  $\lambda = np$ ; а случайная величина  $\xi$ , имеющая Пуассоновское распределение, принимает только целые значения на полуинтервале  $[0, \infty)$  с вероятностями, определяемыми предельной теоремой Пуассона:

$$P_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Примерами случайных величин, имеющих Пуассоновское распределение, являются число сигналов, поступающих на диспетчерский пульт управления в течение часа, количество обрывов проводов в автомобиле за год и др. [12].

Основные числовые характеристики случайных величин, которые имеют Пуассоновский закон распределения, определяются следующими выражениями:  $M[\xi] = \lambda; D[\xi] = \lambda$ .

**Пример 1.** Выпущена партия шин 1000 штук. Вероятность того, что шина имеет брак,  $p = 0,003$ . Найти вероятность того, что в партии ровно пять бракованных шин.

*Решение.* Вероятность числа бракованных шин рассчитывается по формуле Пуассона с параметром  $\lambda = np = 1000 \cdot 0,003 = 3$ . Значит,

$$P(5) = \frac{3^5}{5!} e^{-3} = 0,1008.$$

**Пример 2.** Определить вероятность того, что за 1000 ч работы произойдет два отказа в сложном изделии, если известно, что интенсивность отказов  $a = 3 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$ .

*Решение.* Находим параметр Пуассоновского распределения и определяем вероятность двух отказов в сложном изделии по формуле Пуассона:

$$\lambda = a p = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 3; \quad P(2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0,224.$$

**Экспоненциальное распределение.** Говорят, что СВ имеет показательное распределение, если она непрерывна и имеет функцию плотности распределения (рисунок 3.3)  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

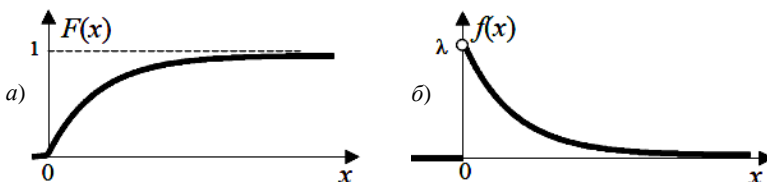


Рисунок 3.3 – Показательный закон распределения:

*a* – функция распределения  $F(x)$  случайной величины  $\xi$ ;

*б* – функция плотности распределения  $f(x)$  случайной величины  $\xi$

Основные числовые характеристики случайной величины  $\xi$ , имеющей показательный закон распределения, определяются следующими выражениями:

$$M[\xi] = \sigma[\xi] = 1 / \lambda; \quad D[\xi] = 1 / \lambda^2.$$

Считается, что время наработки различных технических устройств на отказ имеет показательное распределение (наиболее вероятно, что устройство откажет сразу после включения, менее вероятно, что оно проработает долго). Функция надежности  $R(t)$  используется в качестве модели вероятности безотказной работы за то же время:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t},$$

где  $\lambda$  – интенсивность отказов.

Плотность вероятности отказов  $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ . Среднее время до возникновения отказа или среднее время безотказной работы является математическим ожиданием экспоненциального распределения, т. е. величиной, обратной интенсивности отказов.

Таким образом, зная среднее время безотказной работы  $T_{\text{ср}}$  или постоянную интенсивность отказов  $\lambda$ , можно в случае экспоненциального распределения найти вероятность безотказной работы для интервала времени от момента включения элемента, устройства или агрегата до любого заданного момента  $t$ .

Равенство среднеквадратического отклонения среднему времени работы – характерный признак экспоненциального распределения.

**Пример.** Время безотказной работы амортизатора при перегрузке распределено по экспоненциальному закону  $f(t) = 0,02e^{-0,02t}$ , где  $t$  – время, ч. Найти вероятность того, что амортизатор в перегрузочном режиме проработает безотказно в течение 100 ч.

*Решение.* В качестве модели вероятности безотказной работы амортизатора воспользуемся формулой экспоненциального закона распределения. Значит,

$$R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,02 \cdot 100} = 0,14.$$

Среднее время безотказной работы  $T_{\text{ср}} = 1/\lambda = 1/0,02 = 50$  ч.

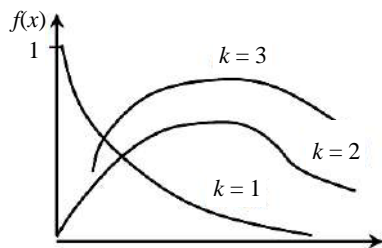
**Гамма-распределение.** Применяется для моделирования параметров надёжности в первый период эксплуатации и в период износа. Если отказ устройства или системы возникает тогда, когда происходит не менее  $k$  отказов его элементов, а отказы элементов подчинены экспоненциальному закону с параметром  $\lambda_0$ , плотность вероятности отказа определяется как

$$f(t) = \frac{\lambda_0^k t^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda_0 t},$$

где  $\lambda_0$  – исходная интенсивность отказов элементов устройства, отказ которого вызывается отказом  $k$  элементов  $\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$ .

Этому распределению подчиняется время работы резервированных устройств, отказ которых вызывается отказом  $k$  их элементов.

При  $k = 1$  гамма-распределение совпадает с экспоненциальным распределением. При увеличении  $k$  гамма-распределение приближается к симметричному распределению, что и показывает рисунок 3.4.



**Распределение Вейбулла.** Применяется в следующей форме:

$$f(t) = \frac{a}{t_0} t^{a-1} e^{-\frac{t}{t_0}},$$

где  $t_0$  – приведённое значение среднего времени безотказной работы;  $a > 0$  – параметр формы распределения.

Вероятность отсутствия отказов за время  $t$   $P(t) = \lambda e^{-\lambda_0 t^a}$ .

Рисунок 3.4 – Изменение формы функции плотности вероятности

Интенсивность отказов  $\lambda(t) = a \lambda_0 e^{-a t}$ .

Распределение Вейбулла имеет большое значение в моделях надёжности. Считается, что время безотказной работы устройств в периоде приработки, когда интенсивность отказов устройства со временем уменьшается (отказы устройства на данном этапе вызваны конструкторскими ошибками, недостаточным качеством монтажа и комплектующих системы), имеет распределение Вейбулла с параметром  $\alpha < 1$  (рисунок 3.5), соответствующее

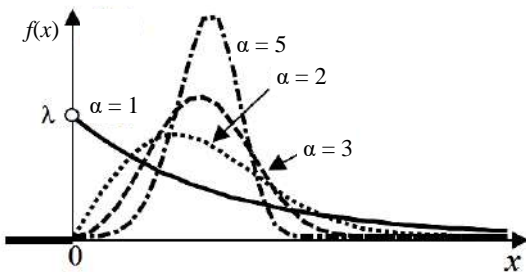


Рисунок 3.5 – Изменение формы функции плотности вероятности распределения Вейбулла в зависимости от  $a$

убывающей функции плотности вероятности. В периоде нормальной эксплуатации, когда интенсивность отказов устройства постоянна, время наработки устройства на отказ совпадает с показательным распределением (распределение Вейбулла с параметром  $\alpha = 1$ ). На этапе старения, когда интенсивность отказов устройств возрастает из-за выработки ресурса не-

которых компонентов, время наработки устройства на отказ имеет распределение Вейбулла с параметром  $\alpha > 1$  [12].

**Равномерный закон распределения.** Непрерывная случайная величина, которая принимает значения, только принадлежащие отрезку  $[a, b]$  с постоянной плотностью распределения, называется распределенной по равномерному закону.

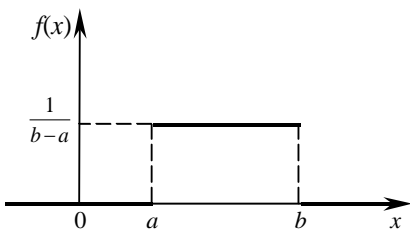


Рисунок 3.6 – График функции  $f(x)$  равномерного распределения

Функция плотности распределения вероятностей (рисунок 3.6) определяется соотношением

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины  $X$ , распределенной по равномерному закону на участке  $[a, b]$ , как следует из механической интерпретации (центр массы), равно абсциссе середины участка:  $M[X] = (a + b) / 2$ . Дисперсию случайной величины  $X$  также можно найти, исходя из механической интерпретации (момент инерции распределения относительно центра массы):  $D[X] = (b - a)^2 / 12$ .

Примером случайной величины, которая имеет равномерный закон распределения, является время ожидания регулярных событий, например, время ожидания троллейбуса, ошибки округления величин с помощью прибора.

**Нормальное (гауссовское) распределение.** Фундаментальное значение в теории вероятностей имеет *центральная предельная теорема*, доказывающая, что сумма **произвольно** распределенных **независимых** случайных величин при условии **одинакового** их влияния распределена по *нормальному закону*.

Случайная величина  $X$  называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где  $m$  – математическое ожидание;

$\sigma$  – среднее квадратическое отклонение.

Кривая функции плотности вероятности нормального распределения имеет колоколообразную форму, симметричную относительно прямой  $x = m$ , и при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow \infty$  эта кривая асимптотически приближается к оси абсцисс. Общий вид графика функции плотности распределения вероятностей  $f(x)$  для произвольных значений  $m$  и  $\sigma$  изображен на рисунке 3.7.

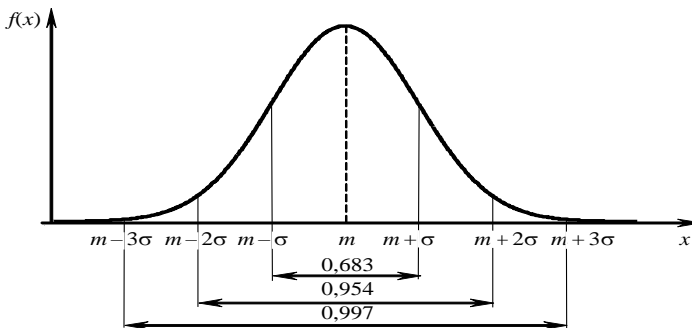


Рисунок 3.7 – График функции плотности распределения вероятностей нормального распределения

Главная особенность этого закона состоит в том, что он является *предельным*; к нему при определенных условиях приближаются другие законы распределения; в теории надёжности применяется для оценки постепенных отказов. Результаты измерения длины, времени, ошибки измерения и многие другие случайные величины имеют нормальное или близкое к нормальному распределение.

С помощью функции Лапласа (табулированная функция) вероятность попадания нормально распределенной случайной величины  $X$  на участок от

$\alpha$  до  $\beta$  выражается формулой  $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)$ .

Например, пусть производятся измерения некоторой физической величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, так как на результат испытания оказывают влияние очень многие, не зависящие друг от друга случайные факторы: температурные колебания в помещении, воздействия окружающей среды, неточность измерительной шкалы, смена контрольного персонала и т. д.

В зависимости от источников появления ошибок различают систематические и случайные ошибки.

К *систематическим ошибкам* относятся, например, односторонние отклонения, вызванные, скажем, изменением настройки измерительного прибора или сменой контрольного персонала. Эти ошибки можно устранить путем систематического изучения причины их возникновения.

*Случайные ошибки* вызваны влиянием множества различных неконтролируемых причин: температурных колебаний, влажности, вибраций в окружающей среде и т. п. Каждый из этих факторов порождает ничтожную «частную ошибку». Но поскольку число этих факторов очень велико, совокупное их действие порождает уже заметную «суммарную ошибку». Полностью исключить воздействие этих факторов невозможно, так как нельзя заранее предусмотреть степень их влияния на результат конкретного измерения. Подобные случайные ошибки вызывают при измерениях отклонения в обе стороны от истинного значения.

Рассматривая общую ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых частных ошибок, мы вправе заключить, что суммарная ошибка имеет распределение, близкое к нормальному. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.

**Пример.** Случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону с параметрами  $M[X] = m$ ,  $\sigma[X] = \sigma$ . Найти вероятность того, что случайная величина  $X$  будет принимать значения, удаленные от математического ожидания не более чем на  $\sigma$ .

*Решение.* Для вычисления искомых вероятностей воспользуемся формулой на основе функции Лапласа:

$$\begin{aligned} P(m - \sigma < X < m + \sigma) &= \Phi\left(\frac{m + \sigma - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m - \sigma - m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \\ &= 0,34134 - (-0,34134) = 0,68268. \end{aligned}$$

**Распределение  $\chi^2$ .** Случайная величина  $\chi^2$  определяется единственным параметром  $\nu$ , имеет функцию плотности распределения (рисунок 3.8)



$$f(\chi^2) = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi^2 < 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu/2)} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}, & \text{если } \chi^2 \geq 0, \end{cases}$$

где  $\Gamma(\nu/2)$  – гамма функция (интеграл Эйлера второго рода).

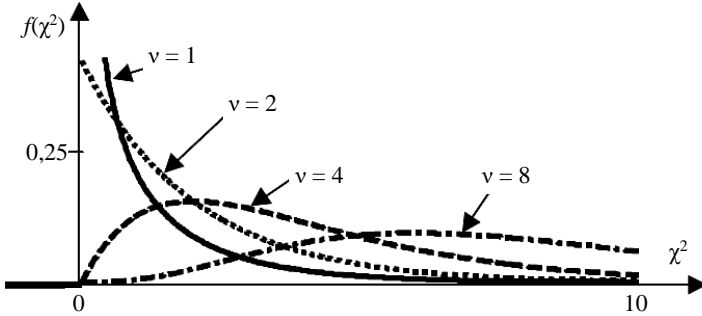


Рисунок 3.8 – Функция плотности распределения  $\chi^2$

Распределение  $\chi^2$  применяется при решении задач, связанных с оценкой параметров надежности при испытаниях или эксплуатации оборудования.

**Изменение интенсивности отказов элементов во времени.** Типичная функция интенсивности отказов во времени (в течение срока службы объекта) имеет U-образный характер (рисунок 3.9). В начальный период I преобладают приработочные отказы. После него наступает наиболее продолжительный период нормальной эксплуатации II, в котором на объект воздействуют случайные факторы. Последние вызывают внезапные отказы, интенсивность которых в период нормальной эксплуатации практически не зависит от времени.



Рисунок 3.9 – Кривая жизни изделия

В период старения и износа III в основном имеют место постепенные отказы, возникающие вследствие накопления ухудшений физико-химических свойств объекта.

### 3.1.3 Предельные теоремы теории вероятностей

Предельные теоремы теории вероятностей условно разделяют на две группы: закон больших чисел и центральная предельная теорема.

**Закон больших чисел** во всех его формах утверждает факт сходимости по вероятности тех или иных случайных величин к определенным постоянным.

Наиболее распространенными формами закона больших чисел являются теорема Бернулли, а также теорема и неравенство Чебышева.

Теорема Бернулли. При неограниченном увеличении числа опытов  $n$  относительная частота наступления случайного события  $A$  сходится по вероятности к вероятности события  $A$ , т. е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{n_A}{n} - P(A) \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \delta,$$

где  $n$  – число повторных испытаний;

$n_A$  – число испытаний, в которых событие  $A$  наступило;

$P(A)$  – вероятность события  $A$ ;

$\varepsilon$  и  $\delta$  – произвольные сколь угодно малые положительные числа.

Теорема Чебышева является обобщением теоремы Бернулли для случайных величин. Она определяет свойство устойчивости среднего арифметического последовательности значений случайной величины.

Теорема Чебышева: при неограниченном увеличении числа независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины  $\xi$  сходится по вероятности к ее математическому ожиданию, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \bar{x} - M[\xi] \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \delta,$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  – среднее арифметическое наблюдаемых значений величины  $\xi$ ;

$M[\xi]$  – математическое ожидание случайной величины  $\xi$ ;

$\varepsilon$  и  $\delta$  – произвольные сколь угодно малые положительные числа.

Неравенство Чебышева. Для произвольной случайной величины  $\xi$  с математическим ожиданием  $M[\xi]$  и дисперсией  $D[\xi]$  справедливо неравенство

$$P \left( \left| \xi - M[\xi] \right| \geq \alpha \right) \leq \frac{D[\xi]}{\alpha^2},$$

где  $\alpha$  – произвольное положительное число.

Неравенство Чебышева ограничивает вероятность значительных отклонений случайной величины  $\xi$  от своего математического ожидания.

**Пример.** Пусть случайная величина  $\xi$ , характеризующая ошибку округления результата измерения деформации манекена при краш-тесте, имеет равномерный закон распределения на интервале  $(-2 \text{ см}; 2 \text{ см})$ , т. е.  $\xi \sim R(-2, 2)$ . Определить наибольшее значение вероятности, с которой ошибка округления деформации манекена отклонится от нуля более чем на  $1,75 \text{ см}$ .

*Решение.* Согласно формулам для математического ожидания и дисперсии равномерного закона распределения случайной величины  $\xi$ ,  $M[\xi] = (-2 + 2) / 2 = 0 \text{ мВ}$ ;  $D[\xi] = (2 - (-2))^2 / 12 = 1,333 \text{ см}^2$ . В соответствии с неравенством Чебышева получим  $P(|\xi - 0| \geq 1,75) \leq \frac{1,333}{1,75^2} = 0,4354$ , т. е. вероятность того, что ошибка округления  $\xi$  превысит (по абсолютной величине)  $1,75 \text{ см}$ , не превышает  $0,4354$ .

В действительности эта вероятность определяется выражением

$$P(|\xi| > 1,75) = P(\{-2 < \xi < -1,75\} \cup \{1,75 < \xi < 2\}) = 1 - P(-1,75 < \xi < 1,75).$$

Используя формулу расчета вероятности равномерного распределения, получим

$$1 - P(-1,75 < \xi < 1,75) = 1 - \frac{1,75 - (-2)}{2 - (-2)} + \frac{-1,75 - (-2)}{2 - (-2)} = 1 - \frac{3,75}{4} + \frac{0,25}{4} = 0,125.$$

Следовательно,  $P(|\xi| > 1,75) = 0,125$ .

### **Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова).**

Во всех случаях, когда случайная величина образуется в результате суммирования большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин, дисперсия каждой из которых мала по сравнению с дисперсией суммы, распределение этой величины оказывается практически нормальным. Поскольку перечисленные выше условия выполняются достаточно часто, то нормальный закон распределения случайных величин достаточно распространен [11].

## **3.2 Основы математической статистики**

*Математическая статистика* – наука для разработки методов регистрации, описания и анализа экспериментальных данных наблюдения массовых случайных явлений. Центральное место в математической статистике занимают *теория оценок* и *теория проверки гипотез*. Основное правило математической статистики гласит: каждое выдвинутое предложение должно быть *оценено* и *проверено* на правдоподобие.

Всякое наблюдение дает какое-то ограниченное представление о явлении в целом, в том числе и об определенной случайной величине. Итогом такого наблюдения, т. е. отбора информации, становится *выборка* – некоторая совокупность результатов наблюдения случайной величины (*генеральной совокупности*), отобранная для исследования по определенному правилу. Таким образом, результаты наблюдения случайного явления дают лишь ограниченную информацию о случайной величине в целом. Поэтому пере-

ход от зафиксированного экспериментального факта к выводу и прогнозу – далеко не очевиден и нуждается в обосновании. Математическая статистика позволяет по результатам наблюдения **частного** (*выборки*) сделать некоторые обоснованные выводы о характеристиках **общего** (*генеральной совокупности*).

**Пример.** Вся продукция завода по производству тормозных дисков – генеральная совокупность, проверенная часть тормозных дисков – выборка. По сроку службы в **среднем**, вычисленному по выборке, можно судить о сроке службы тормозных дисков в **среднем** для всей генеральной совокупности. Но лишь "судить", "оценивать", ибо нельзя знать заранее срок службы какого-либо конкретного диска.

Общая последовательность применения методов математической статистики (в скобках дается комментарий в современных терминах):

1) планирование исследований (*планирование эксперимента*, определение способа отбора информации);

2) конкретизация математико-статистического описания (выбор *дисперсионной* или *регрессионной модели*);

3) оценка параметров модели (получение *точечных* и *интервальных оценок*) и составление их выборочных (эмпирических) распределений;

4) изучение согласия между моделью и наблюдениями (*адекватность модели* оригиналу и проверка критериев согласия в обоснование модели);

5) реальное решение задачи посредством оценок параметров и критериев значимости (*статистический анализ* результатов и разработка выводов).

Первый и третий этапы представляют собой так называемую процедуру *первичной обработки информации*, которая начинается с отбора информации, включает построение гистограмм и полигонов частот (если это необходимо для визуальной оценки вида эмпирического распределения) и завершается расчетом точечных и интервальных **оценок**. Эти результаты служат исходным материалом для четвертого и пятого этапов – *статистического анализа*, целью которого является установление статистических **закономерностей**.

### 3.2.1 Отбор информации

Исследователь, озабоченный составлением некоторой модели явления, стремится получить из эксперимента лишь ограниченный круг параметров, ее описывающих. Под эту задачу и собирается информация. Таким образом формулируются первичные требования к отбору информации.

Однако статистический материал может содержать в себе намного больше информации, чем ставилось целью собрать. Можно получить значения наблюдаемых параметров с контролируемой погрешностью и с заданной вероятностью, что позволяет сделать первичная обработка информации. Умелое извлечение информации позволяет еще и быстрее достичь требуемого результата, и оценить его добротность, и даже оценить адекватность

разрабатываемой модели. Но не стоит думать, что математическая статистика отвечает на все вопросы. Во-первых, она способна обработать только ту информацию, которая собрана. Во-вторых, ее методы дают лишь более или менее вероятные (и эту вероятность можно оценить) результаты. Поэтому нет и не может быть математической обработки информации *вообще*, есть только аппарат для целевых исследований, невозможных без предварительных предположений о модели. То есть за человеком в любом случае остается творческий подход к выбору модели, к способам отбора информации и к формулировке выводов.

Для анализа информации не важно, получена она из натурального эксперимента или из вычислительного эксперимента на детерминированной или стохастической модели. В любом случае основными *проблемами сбора и обработки информации* являются:

- выбор существенных факторов;
- выбор процедуры отбора информации;
- обеспечение достоверности выводов по результатам анализа.

Все эти проблемы разрешимы с помощью математического аппарата статистического анализа, излагаемого в последующих параграфах.

Следующий пример иллюстрирует необходимость строгого научного подхода к сбору и обработке информации.

**Пример.** Социологический опрос. Пусть результаты ответов 50 человек на вопрос установки “лежачего полицейского” возле детского сада представлены рядом знаков “+” – “да” и “-” – “нет”:

+ + - + + + + - + - + - - - + + - + - + - - - + - + + + - - - - + + + - + + - + + - + + +

Подсчитаем количество тех и других знаков: “+” встречается 29 раз, “-” – 21 раз. То есть ответов “да” на 38 % больше, чем “нет”. Но подождем делать соответствующие практические выводы. Подсчитаем баланс знаков, стоящих на четных местах: “+” – 18, “-” – 7; и на нечетных: “+” – 11, “-” – 14. Насколько можно доверять общим итогам опроса в таком случае?

В каждой практической задаче можно выдвинуть множество гипотез о происхождении таких разногласий, например, в рассматриваемом примере можно предположить и психологические особенности разных групп респондентов, и недоброкачественный (непредставительный) отбор респондентов, и не добросовестность сборщиков информации и т. д. Можно ли оценить степень их влияния на итоговый результат? И как отобрать “хорошую” информацию?

Математическая статистика может дать ответы на все эти вопросы! Конечно, она не сформулирует причины обнаруженного разногласия и не даст непосредственного рецепта для отбора информации. Но она может оценить **вероятность** правильности выдвигаемых **гипотез**, определить число факторов, которые оказали решающее влияние на результаты, и оценить вклад каждого из них. С помощью математической статистики можно оценить и добротность самого статистического материала.

Отбор информации – важнейшая операция, от правильного проведения которой существенно зависит результат статистического анализа, а, следовательно, и выводы исследований. Не стоит заблуждаться относительно якобы объективности данных наблюдения или эксперимента. Во-первых, результаты таких наблюдений всегда имеют свойства случайной выборки из генеральной совокупности. Так обстоит дело и при контроле технологических процессов, когда проверяются не все характеристики не всех изделий; и при изучении природных явлений, когда не все факторы учитываются и контролируются; и при экспертизе, в которой принимает участие ограниченный круг экспертов. Во-вторых, информация собирается для определенных целей. Для проверки различных моделей необходима различная информация, подчас одна в другую не преобразуемая. В-третьих, результаты наблюдений фиксируются всегда с какой-то погрешностью: из-за методики измерения, измерительной аппаратуры, округлений и т. п. Опыт человечества, давно заметившего эти обстоятельства, привел к простейшему приему отбора информации: чем ее больше, тем лучше. В теории измерений повышение объективности данных нашло свое выражение в методике многократного повторения опытов в идентичных условиях.

Однако не всегда есть возможность повторять опыты: это может быть слишком дорогим удовольствием или в принципе невозможно. В связи с этим приходится подробнее рассматривать различные виды отбора информации в эксперименте – получения выборки.

Приведем пример фиксации информации, соответствующий нарушению работоспособности (функционалирования):

- общая наработка и наработка от предыдущего отказа;
- внешние признаки и степень влияния отказа на работоспособность объекта или системы;
- условия среды в момент отказа;
- причина отказа (предполагаемая причина);
- «адресная» информация;
- данные об оперативности переключения резерва;
- способ и время устранения отказа [12].

Отбор информации, происходящий помимо воли исследователя, называется *естественным* в противоположность *искусственному*. Здесь не следует путать ситуацию с *пассивным и активным экспериментом* – естественный отбор предполагает получение информации в виде констатации определенных событий, процесс которой (констатации) не зависит от исследователя. Далее рассматриваются различные виды *искусственного отбора*.

*Пристрастный отбор* осуществляется по заранее намеченному признаку. Наука до XX века пользовалась именно пристрастным отбором информации: для выявления какой-либо зависимости в изучаемом природном яв-

лении необходимо было избавиться от влияния "посторонних" факторов (например, от притяжения Земли, от проходящего трамвая и т. п.). Поэтому каждый отдельный опыт в эксперименте ставился в одних и тех же специальных условиях, имевших немаловажное значение и получивших наименование "чистоты эксперимента".

*Случайный отбор* производится с помощью случайных чисел по любой методике.

*Механический отбор* – отбор данных из всей совокупности по какому-либо правилу (например, каждый пятый).

*Типический отбор* – отбор из слоев (частей) всей имеющейся совокупности. Так делается отбор материала из отдельных партий продукции для технического контроля.

*Пропорциональный отбор* – частный случай типического отбора, когда из каждого слоя отбирается часть, пропорциональная объему слоя.

При *репрезентативном отборе* получается *представительная выборка*, достаточно **полно** характеризующая **всю** совокупность с точки зрения влияния важных и существенных факторов. Безусловно, к такому отбору следует стремиться, однако для оценки степени репрезентативности необходимы именно те характеристики, которые являются результатом конечного анализа отобранной информации. Поэтому в таких областях, как, например, политическая социология или экология, где цена принимаемого решения чрезвычайно высока, проводится специальный статистический эксперимент для оценки репрезентативности различных выборок и построения оптимальной из них по определенному критерию.

Для получения наиболее представительных оценок необходимо объединять данные целого ряда различных объектов. Допустимость такого объединения основывается на проверке гипотезы однородности статистического материала. Для оценок доверительных интервалов и проверки гипотез широко используется распределение  $\chi^2$ .

С помощью математической статистики определяется также необходимый объем испытаний для оценки надёжности с заданной точностью и проверяется влияние различных факторов (*дисперсионный анализ*) и взаимное влияние случайных параметров друг на друга (*корреляционный анализ*). Наконец, математическая статистика позволяет планировать испытания и исследования так, чтобы получить максимальную информацию при минимальных затратах (*теория экстремальных экспериментов*) [13].

**Порядок обработки информации.** С точки зрения объёма априорных сведений, *задачи статистической обработки* сводятся к двум вариантам:

1. Вид функции распределения наблюдаемой случайной величины известен априори. В этом случае задача статистической обработки – получение



оценок показателей надёжности с учётом вида функции распределения и характера имеющегося статистического материала.

2. Вид функции распределения наблюдаемой случайной величины неизвестен или известен лишь предположительно. В этом случае принимается некоторая гипотеза о виде функции распределения и оцениваются ее параметры. Затем проводится проверка, не противоречат ли данные наблюдений принятой гипотезе. При положительных результатах этой проверки приступают к заключительному этапу обработки.

В такой постановке процесс статистической обработки более трудоёмок и состоит из следующих *этапов*: построение вариационного ряда; построение гистограммы; принятие гипотезы о виде закона распределения; оценка точечных значений параметров для принятия функции распределения; проверка непротиворечивости результатов наблюдений принятой гипотезе; оценка интервальных значений параметров функций распределения и показателей надёжности (при положительных результатах предыдущего этапа).

В случае отрицательного результата процедуры проверки гипотезы процесс статистической обработки повторяется, начиная с этапа принятия гипотезы; при другом предположении о виде функции распределения в некоторых случаях приходится возвращаться к этапу дальнейшего накопления данных.

Одной из особенностей информации при экспертизе ДТП является то, что результаты наблюдений представляют собой, как правило, выборки.

*Характер статистического материала* определяется в основном порядком: начала и прекращения наблюдений; ремонта (замены) отказавшего элемента; контроля функционирования объекта или системы в условиях эксплуатации. В зависимости от назначения объекта и конкретных условий его эксплуатации перечисленные факторы могут реализовываться в различных вариантах. В частности, контроль функционирования может быть непрерывным, периодическим либо только перед началом и по окончании выполнения некоторого фиксированного задания (объема работы).

В результате наблюдений (испытаний) получают лишь *три типа реализаций*:

1) полные – наработки до отказа (между отказами или до предельного состояния), или отрезки времени от начала до окончания восстановления;

2) неполные – безотказные наработки как результат прекращения наблюдений до наступления отказа (цензурирование);

3) условные – наработки на момент контроля, при котором обнаружен отказ (получаются в условиях, когда нет непрерывного контроля функционирования и момент отказа неизвестен).

К перечисленным типам реализаций присвоены следующие графические обозначения: полная –  $\times$ ; неполная –  $-$ ; условная –  $.$ . При помощи обозначений результаты наблюдений могут быть представлены графически соответствующим набором реализаций – диаграммой реализаций (рисунок 3.10).

-- Схема процесса наблюдений

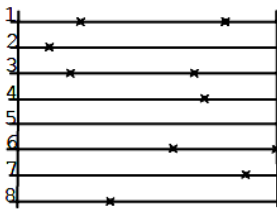


Диаграмма реализаций\*

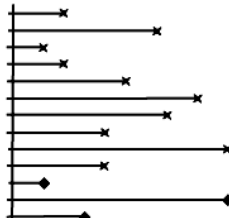


Диаграмма реализаций наглядно и однозначно отражает специфику полученного статистического материала и позволяет выбрать адекватные его характеру правила обработки, т. е.

Рисунок 3.10 – Графическая иллюстрация результатов наблюдений

правила получения точечных и интервальных оценок параметров функций распределения и показателей надежности.

Вопросы организации наблюдений, инженерной и статистической обработки информации при оценках показателей надежности являются универсальными. Основными специфическими особенностями являются: четкое определение объекта исследования; формулировка критериев отказов (критического, существенного, несущественного, полного, частичного и т. п.). При определении объекта исследования и формулировке критериев отказа иногда требуется учитывать влияние человека [8].

### 3.2.2 Требования к точечным оценкам и объему выборок

В процессе любого эксперимента, в том числе и вычислительного, приходится иметь дело с теми или иными значениями наблюдаемых параметров. Определение этих значений с достаточной точностью невозможно без многократных повторений опытов и специальной процедуры их обработки. Простейшим примером этого является определение средней величины результатов однотипных измерений. В более сложных случаях приходится вычислять значения **ненаблюдаемых** параметров по значениям наблюдаемых. Определение значения некоторого параметра наблюдаемого объекта по экспериментальным данным носит название статистической точечной оценки.

В первую очередь для расчетов и анализа любой случайной величины  $\xi$  необходимо получить точечные оценки **параметров закона** ее распределения, основными из которых являются *математическое ожидание  $M$*  и *дисперсия  $\sigma^2$* . Поэтому изучение *статистических методов точечных оценок* сосредоточено на получении оценок именно этих величин.

Наиболее простым методом нахождения точечных оценок является метод моментов, предложенный К. Пирсоном. Он заключается в приравнивании начальных или центральных моментов генеральной совокупности соответствующим моментам выборки.

Но если в нашем распоряжении  $k$  выборок (например, полученных  $k$  исследователями), то не ясно, какую из выборочных средних надо принять за

оценку математического ожидания. Более того, эти выборочные средние сами по себе случайные величины, так как и выборки и условия экспериментов могут случайно меняться. Тогда возникает вопрос, как это надо считать: ведь объем информации в разных выборках различен!

Способ определения *точечной оценки*  $\lambda^*$  истинного значения параметра  $\lambda$  определяется теми ее свойствами, которые необходимо обеспечить в конкретном случае. Математическая статистика рассматривает следующие *свойства точечных оценок*.

Несмещенность – свойство точечной оценки  $\lambda^*$ , при котором ее математическое ожидание равно истинному значению  $\lambda$  оцениваемого параметра. То есть несмещенная точечная оценка определяет искомый параметр **без систематической ошибки**: отклонения, например, от генеральной средней (математического ожидания) распределены симметрично.

Состоятельность – свойство точечной оценки  $\lambda^*$ , при котором с возрастанием объема выборки  $N$  она **стремится** по вероятности к истинному значению  $\lambda$  оцениваемого параметра:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|\lambda^* - \lambda| < \varepsilon) = 1,$$

где  $P$  – вероятность;  $\varepsilon$  – произвольное сколь угодно малое число.

В специальном курсе математической статистики доказывается, что выборочная средняя  $\lambda^*$  является состоятельной оценкой математического ожидания.

*Эффективной* называется точечная оценка  $\lambda^*$ , имеющая при заданном объеме выборки  $N$  **наименьшую дисперсию**. Естественно, что из нескольких *состоятельных* оценок следует выбирать наиболее эффективную. Препятствием выявления этого свойства может стать необходимость знания закона распределения изучаемой случайной величины. Поэтому далеко не всегда удастся обеспечить эффективность найденной точечной оценки. Можно показать, что выборочное среднее является эффективной оценкой математического ожидания.

Необходимость получения состоятельных, эффективных и достаточных оценок в случаях **неизвестных** законов распределения привела к разработке приемов получения *робастных* оценок и критериев, не зависящих от вида закона распределения или, по крайней мере, устойчивых к его нарушениям. Однако обольщаться этими приемами не следует, так как они в основном имеют эмпирическое происхождение, связаны с удачными решениями определенных задач, а в общем случае теоретически **не обоснованы**, т. е. не гарантируют получения результата.

Перечисленные выше требования к оценкам наталкивают на вопрос о приемлемом для тех или иных оценок объеме информации. Более подробно этот вопрос освещен в главе 4, здесь же достаточно упомянуть простейшие практические ограничения снизу на объем статистического материала:  $N \geq 30$ .

Это ограничение касается не столько обеспечения состоятельности и эффективности оценки, сколько достаточности степеней свободы выборки. *Чис-*

лом степеней свободы для системы  $n$  случайных величин называется число  $n$  этих величин минус число линейных связей между ними. При определении выборочного среднего – первой числовой характеристики (связи) – в качестве числа степеней свободы используется объем выборки  $N$ . При вычислении второй характеристики – дисперсии – число степеней свободы необходимо уменьшить на 1 за счет использования связи в виде выборочного среднего.

В таблице 3.4 приведены формулы для вычисления требуемых объемов выборок из слоев, отобранных различными способами, и выборочного среднего всей совокупности с его дисперсией.

Таблица 3.4 – Формулы для вычисления требуемых объемов выборок

| Способ отбора                            | Объем  | Математическое ожидание   | Дисперсия   |
|--|--|---|---|
| Генеральная совокупность                 | $N$  | $\sum_{j=1}^k \mu_j \alpha_j$   | $\sum_{j=1}^k \mu_j \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^k \mu_j (\alpha_j - \sum_{i=1}^k \mu_i \alpha_i)^2$                   |
| Расслоенный отбор                        | Требуемый $N_i$  | Выборочное среднее  | Дисперсия выборочного среднего  |
| Произвольный                             | $N$  | $\sum_{j=1}^k \mu_j \bar{x}_j$  | $\sum_{j=1}^k \mu_j^2 \frac{\sigma_j^2}{N_j} (1 - \alpha_j)$  |
| Пропорциональный                         | $\mu_j N$  | $\sum_{j=1}^k \mu_j \bar{x}_j$  | $\frac{1 - \alpha}{N} \sum_{j=1}^k \mu_j \sigma_j^2$  |
| Оптимальный (минимальная дисперсия $D$ ) | $\frac{\mu_i \sigma_i}{\sum_{j=1}^k \mu_j \sigma_j} N$                                       | $\sum_{j=1}^k \mu_j \sigma_j \sum_{j=1}^k \frac{\mu_j \bar{x}_j}{\sigma_j}$                               | $\frac{\left( \sum_{j=1}^k \mu_j \sigma_j \right)^2}{N} - \frac{\sum_{j=1}^k \mu_j \sigma_j^2}{M}$                |
| Оптимальный (минимальная стоимость $C$ ) | $\frac{\mu_i \sigma_i}{\sum_{j=1}^k \frac{\mu_j \sigma_j}{\sqrt{c_j}}} \frac{N}{\sqrt{c_i}}$ | $\sum_{j=1}^k \frac{\mu_j \sigma_j}{\sqrt{c_j}} \sum_{j=1}^k \frac{\mu_j \bar{x}_j}{\sigma_j} \sqrt{c_j}$ | $\frac{\left( \sum_{j=1}^k \frac{\mu_j \sigma_j}{\sqrt{c_j}} \right)^2}{N} \sum_{j=1}^k \mu_j c_j (1 - \alpha_j)$ |

Здесь использованы следующие обозначения:  $\mu_j$  – центральный момент  $j$ -го слоя;  $\bar{x}$  – выборочное среднее;  $k$  – количество выборок;  $N$  – объем выборки;  $\alpha = \frac{N}{M}$ ,  $\mu_i = \frac{M_i}{M}$ ,  $\alpha_j = \frac{N_j}{M}$ ; стоимость эксперимента обозначена

$C = C_0 + \sum_{j=1}^k c_j N_j$ , где  $C_0$  – накладные расходы;  $c_j$  – стоимость одного наблюдения в  $j$ -м слое.

### 3.2.3 Проверка статистических гипотез

В многообразной практической деятельности человека процедура выдвигаения и проверки гипотез имеет самые различные формы от простейших бытовых обсуждений (насколько разбавлена сметана недобросовестным продавцом) до расчетов стоимости эффекта и потерь (какова средняя стоимость ремонта аварийного автомобиля – для страховой компании). Наиболее обоснованной из этих форм является математическая теория проверки статистических гипотез.

В математической статистике существует жесткое правило: любое предположение о свойствах распределения некоторой величины, основанное на *выборочных* данных, должно быть проверено. Статистическая проверка не может доказать истинность (чего не может сделать вообще никто), но может указать с некоторой долей уверенности на *наличие или отсутствие признаков опровержения* данного суждения. Дальше уже дело человека – принять или отвергнуть предлагаемую гипотезу на основании такого статистического вывода.

**Проверка однородности статистического материала.** Для более точного определения показателей надёжности и установления видов законов распределения наработки на отказ и других случайных величин необходимо объединять статистические данные, собранные на различных объектах промышленных предприятий и энергосистем. В связи с этим возникает задача проверки однородности статистического материала.

Помимо выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  имеются также взаимно независимые величины  $x_1', x_2', \dots, x_m'$ , распределённые одинаково и непрерывно, но принадлежащие другой выборке. Объединим эти совокупности, расположив их в порядке возрастания значений  $x_1'', x_2'', \dots, x_{n+m}$ . Обозначим функцию эмпирического распределения как  $G_m(x)$ , соответствующую выборке  $x_1', x_2', \dots, x_m'$ .

Основная гипотеза  $H_0$ , подлежащая проверке, заключается в предположении того, что обе выборки извлечены из одной и той же совокупности, а значения функции распределения величин  $x$  и  $x'$  одинаковы.

Для проверки нулевой гипотезы используется критерий Вилкоксона, основанный на числе инверсий, под которыми понимается следующее: если какому-либо значению  $x$  предшествует некоторый  $x'$ , то говорят, что эта пара дает инверсию.

Гипотеза  $H_0$  отвергается, если сумма инверсий  $u$  превосходит выбранную в соответствии с уровнем значимости границу, определяемую из расчёта, что при объёмах  $n > 10$  и  $m > 10$  выборочное число инверсий распределено нормально с центром  $M(u) = 0,5mn$  и дисперсией  $D(u) = (1/12)mn(m + n + 1)$ .

**Пример.** Собраны статистические сведения о средней повреждаемости дорожного покрытия на остановочных пунктах городского маршрутного транспорта ( $m$ ) (таблица 3.5).

Таблица 3.5 – Исходные данные двух объектов исследования

| Обозначение данных | Месяц |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--------------------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                    | я     | ф   | м   | а   | м   | и   | и   | а   | с   | о   | н   | д   |
| $x$                | 0,8   | 1,9 | 3   | 3,5 | 3,8 | 2,5 | 1,7 | 0,9 | 1   | 2,3 | 3,3 | 3,4 |
| $x'$               | 1,4   | 2,1 | 3,1 | 3,6 | 2,7 | 1,8 | 1,1 | 0,2 | 1,6 | 2,8 | 4   | 4,7 |

Требуется определить, можно ли считать, что между данными о повреждаемости дорожных покрытий, обслуживаемых дорожными предприятиями двух городов, нет систематических расхождений и что они имеют одинаковые систематические погрешности, т. е. нужно проверить нулевую гипотезу  $H_0$ .

*Решение.* Располагаем данные в общую последовательность в порядке возрастания повреждаемости (таблица 3.6).

Таблица 3.6 – Обобщенный вариационный ряд

|      |      |      |     |      |      |      |     |      |     |      |      |
|------|------|------|-----|------|------|------|-----|------|-----|------|------|
| $x'$ | $x$  | $x$  | $x$ | $x'$ | $x'$ | $x'$ | $x$ | $x'$ | $x$ | $x'$ | $x'$ |
| 0,2  | 0,8  | 0,9  | 1   | 1,1  | 1,4  | 1,6  | 1,7 | 1,8  | 1,9 | 2,1  | 2,3  |
| $x$  | $x'$ | $x'$ | $x$ | $x'$ | $x$  | $x$  | $x$ | $x'$ | $x$ | $x'$ | $x'$ |
| 2,5  | 2,7  | 2,8  | 3   | 3,1  | 3,3  | 3,4  | 3,5 | 3,6  | 3,8 | 4    | 4,7  |

Число инверсий для  $x$

$$u = 1 + 1 + 1 + 4 + 5 + 6 + 6 + 8 + 9 + 9 + 9 + 10 = 69.$$

Находим математическое ожидание и дисперсию:

$$M(u) = 0,5 \cdot 12 \cdot 12 = 72; \quad D(u) = (1/12) \cdot 12 \cdot 12 (12 + 12 + 1) = 300;$$

$$\sigma = \sqrt{D(u)} = 17,3.$$

Задавшись уровнем значимости 5 % и учитывая, что городские дорожные предприятия являются равноправными, строим критическую область больших по абсолютной величине отклонений, используя значение  $t_{0,05} = 1,96$ .

Критическая область для гипотезы  $H_0$ :

$$u \leq 72 - 1,96 \cdot 17,3 \approx 38; \quad u \geq 72 + 1,96 \cdot 17,3 \approx 106$$

Полученное значение инверсии  $u = 69$  не лежит в критической области, поэтому гипотеза  $H_0$  не опровергается и нет оснований считать повреждаемость дорожных покрытий, обслуживаемых дорожными предприятиями двух городов, существенно различающимися между собой.

**Проверка гипотез о законе распределения случайной величины.** В качестве выдвигаемых гипотез обычно выступают предположения о свойствах закона распределения генеральной совокупности. Таковыми могут быть предположения о значениях параметров  $\lambda$  закона распределения – для их проверки применяются *параметрические критерии*, а также предположения о непараметризуемых свойствах распределения – для них служат *непараметрические критерии*. Первые требуют знания общего вида закона распределения, зато вторые оказываются менее эффективными. В качестве **критерия** соответствия понимается достижение определенного значения *функции правдоподобия* полученной выборки. То есть если выборка попада-

ет в область малого правдоподобия, то присутствуют признаки опровержения гипотезы – *есть основания отвергнуть* эту гипотезу. В противоположном случае *нет оснований отвергнуть* гипотезу.

Нулевой ( $H_0$ ) называют выдвинутую гипотезу. Альтернативной ( $H_a$ ) называется гипотеза, конкурирующая с нулевой гипотезой в том смысле, что если отвергается нулевая гипотеза, то принимается альтернативная.

Однако, поскольку наши суждения о реальности весьма ограничены. При проверке статистических гипотез по выборочным данным всегда существует возможность принятия ложного решения. Это объясняется тем, что объем выборки конечен, и поэтому нельзя точно определить ни вид функции распределения, ни значения параметров. Возможная ошибка в наших выводах предполагает не два, а четыре исхода:

- 1) гипотеза **верна** и **не отвергается** согласно критерию (правильный вывод);
- 2) гипотеза **неверна** и **отвергается** согласно критерию (правильный вывод);
- 3) гипотеза **верна**, но **отвергается** согласно критерию (ошибка I рода);
- 4) гипотеза **неверна**, но **не отвергается** согласно критерию (ошибка II рода).

Вероятность ошибки I рода, т. е. вероятность ошибки *при условии* верности гипотезы, принято обозначать  $\alpha$  и называть уровнем значимости критерия. Для оценки гипотезы необходимо назначать *уровень значимости* – максимальное значение вероятности, которое принимается за *практическую невозможность* получения конкретной выборки с гипотетическими свойствами. Тогда вероятность правильного неотвержения проверяемой гипотезы (1-го исхода) равна  $1-\alpha$ .

Вероятность ошибки II рода, т. е. вероятность ошибки при условии **не**верности гипотезы, может быть оценена только после конкретизации *альтернативной (конкурирующей) гипотезы*, поскольку в этом случае решающее значение имеет "отдаленность" исходной гипотезы от ее альтернативы. Эту вероятность принято обозначать  $\beta$ . При этом вероятность правильного отвержения проверяемой гипотезы (2-й исход) равна  $1-\beta$ , эта величина называется мощностью критерия.

Будем рассматривать только один вид статистических критериев – статистические критерии значимости. Это значит, что будет заранее фиксироваться вероятность совершения ошибки первого рода, и тогда нет необходимости в нахождении ошибки второго рода  $\beta$ . Например, если при отклонении нулевой гипотезы  $H_0$  на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  мы совершаем ошибку первого рода (считаем правильную нулевую гипотезу  $H_0$  ложной), то в среднем ошибаемся в 5 из 100 случаев применения данного статистического критерия значимости.

**Критерий хи-квадрат Пирсона.** Если изучается непрерывная случайная величина, то вид гистограммы относительных частот обычно значительно облегчает задачу выдвижения гипотезы  $H_0$ . Например, по виду гистограммы, изображенной на рисунке 3.11, *a*, логично выдвинуть гипотезу о

равномерном законе распределения исследуемой случайной величины. Вид гистограмм, приведённых на рисунках 3.11, б и 3.11, в, напоминает соответственно кривые экспоненциального и нормального законов распределения. Большое внимание при выдвижении гипотез уделяется и вычисленным значениям числовых характеристик.

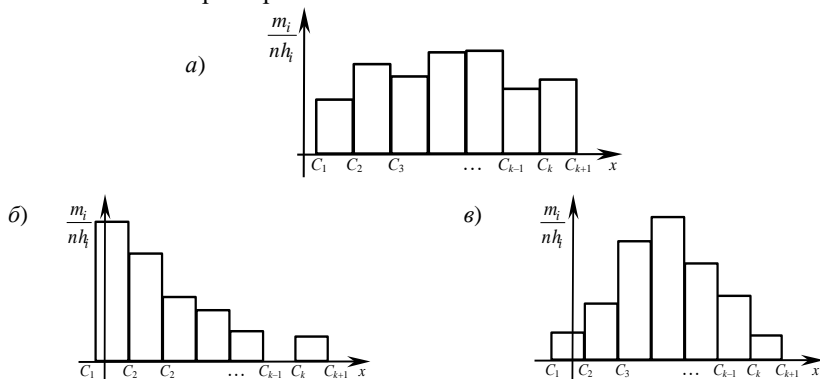


Рисунок 3.11– Примеры гистограмм относительных частот

Проверка гипотезы о предполагаемом распределении производится с помощью непараметрических критериев значимости. Одной из групп таких критериев значимости являются критерии согласия, с помощью которых проверяются нулевые гипотезы о виде функции распределения случайной величины. Одним из наиболее широко используемых на практике критериев согласия является критерий  $\chi^2$  Пирсона. Он может использоваться для проверки гипотез о виде закона распределения как дискретных, так и непрерывных случайных величин [14].

Применение критерия  $\chi^2$  основано на сопоставлении эмпирических  $m_i$  и теоретических  $np_i$  (вычисленных в предположении справедливости проверяемой гипотезы) частот попадания значений исследуемой случайной величины в рассматриваемые частичные разряды. В качестве меры расхождения эмпирического и теоретического распределений используется статистика

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

которая при  $n \rightarrow \infty$  независимо от вида предполагаемого распределения стремится к распределению  $\chi^2$  с  $\nu = k - r - 1$  степенями свободы (здесь  $k$  – число разрядов разбиения,  $r$  – число параметров теоретического распределения, оцениваемых по выборке).

Легко заметить, что при незначительных отклонениях значений  $m_i$  от  $np_i$  значение критерия  $\chi^2$  будет близким к нулю. И наоборот, большое значение



критерия  $\chi^2$  свидетельствует о существенном отклонении значений  $m_i$  и  $np_i$ .

Необходимыми условиями применения критерия  $\chi^2$  являются достаточно большой объем выборки ( $n \geq 30$ ) и отсутствие в теоретическом распределении разрядов с небольшим ( $np_i < 5$ ) числом наблюдений. Для обеспечения последнего условия интервалы, для которых  $np_i < 5$ , необходимо объединить с соседними. На хвостах распределения допускается значение  $np_i \geq 1$ .

Алгоритм применения критерия  $\chi^2$  для проверки гипотезы о виде закона распределения исследуемой случайной величины:

1. Строится статистический закон распределения случайной величины.
2. Выбирается уровень значимости  $\alpha$ .
3. Формулируется гипотеза о виде закона распределения исследуемой случайной величины.

4. Вычисляются теоретические вероятности  $p_i$  попадания значений случайной величины  $X$  в рассматриваемые разряды разбиения:

$p_i = P(C_i \leq X < C_{i+1}) = F(C_{i+1}) - F(C_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), где  $F(x)$  – гипотетическая функция распределения случайной величины  $X$ .

5. Определяются значения теоретических частот  $np_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). При необходимости для обеспечения условия  $np_i \geq 5$  объединяются несколько соседних разрядов разбиения.

6. Вычисляется выборочное значение критерия  $\chi^2$ .

7. По таблице критических точек распределения  $\chi^2$  определяется критическое значение  $\chi_{\alpha, \nu}^2$ , соответствующее заданному уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $\nu = k - r - 1$ .

Если расчётное значение критерия попадает в критическую область, т. е.  $\hat{\chi}^2 > \chi_{\alpha, \nu}^2$ , то проверяемая гипотеза отвергается (при этом вероятность отклонения верной нулевой гипотезы равна  $\alpha$ ). В случаях, когда  $\hat{\chi}^2 \leq \chi_{\alpha, \nu}^2$ , считают, что выдвинутая гипотеза не противоречит опытным данным. Подчеркнем, что полученный результат свидетельствует лишь о приемлемом согласовании проверяемой гипотезы с имеющимися выборочными данными и в общем случае не является доказательством истинности этой гипотезы.

**Пример.** На основании приведенных опытных данных подобрать закон распределения непрерывной случайной величины  $X$ , характеризующей продолжительность работы 50 светодиодных ламп наружного освещения автомобиля (в тысячах часов):

6,421; 5,034; 0,599; 10,687; 26,294; 7,852; 14,040; 8,933; 4,062; 1,573;  
5,455; 2,810; 15,658; 3,692; 1,825; 17,760; 8,030; 3,218; 2,872; 8,247;  
0,417; 1,995; 0,611; 12,059; 0,665; 21,434; 22,102; 10,709; 2,283; 5,649;  
6,773; 30,034; 3,702; 12,834; 2,723; 5,255; 12,595; 3,533; 34,540; 9,238;  
1,673; 24,919; 15,511; 7,154; 1,816; 8,401; 22,239; 2,902; 3,083; 7,176.

Уровень значимости  $\alpha$  принять равным 0,05.

*Решение.* Используя результаты первичной обработки выборочных данных [вид полученной гистограммы (рисунок 3.12) и значения оценок числовых характеристик  $\hat{M}[X]=8,98$ ,  $\hat{\sigma}[X]=8,34$ ], а также учитывая сведения о физическом смысле полученных значений, выдвигаем гипотезу о том, что случайная величина  $X$  распределена по экспоненциальному закону.

Вычислим оценку параметра экспоненциального закона распределения:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{M}[X]} = \frac{1}{8,98} \approx 0,1113.$$

При вычислении вероятностей  $p_i = P(C_i \leq X < C_{i+1})$  изменим границы первого и последнего интервалов разбиения (таблица 3.7).

Таблица 3.7 – Результаты расчета теоретических вероятностей

| $C_i$            | $Z_i = e^{-0,1113 C_i}$ | $P_i = Z_i - Z_{i+1}$ |
|------------------|-------------------------|-----------------------|
| 0                | 1                       | 0,2828                |
| 2,987            | 0,7172                  | 0,3124                |
| 8,127            | 0,4047                  | 0,1763                |
| 13,267           | 0,2284                  | 0,0995                |
| 18,407           | 0,1289                  | 0,0562                |
| 23,547           | 0,0727                  | 0,0317                |
| 28,687           | 0,0410                  | 0,0179                |
| 33,827           | 0,0232                  | 0,0232                |
| $\infty$         | 0                       | —                     |
| $\sum_i P_i = 1$ |                         |                       |

Определим значения теоретических частот и занесём их в таблицу 3.8.

Таблица 3.8 – Результаты расчета значений теоретических частот

| $[C_i; C_{i+1})$ | [0; 2,987) | [2,987; 8,127) | [8,127; 13,267) | [13,267; 18,407) | [18,407; 23,547) | [23,547; 28,687) | [28,687; 33,827) | [33,827; $\infty$ ) |
|------------------|------------|----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|---------------------|
| $m_i$            | 14         | 16             | 9               | 4                | 3                | 2                | 1                | 1                   |
| $p_i$            | 0,2828     | 0,3124         | 0,1763          | 0,0995           | 0,0562           | 0,0317           | 0,0179           | 0,0232              |
| $np_i$           | 14,140     | 15,620         | 8,815           | 4,975            | 2,810            | 1,585            | 0,895            | 1,160               |

Поскольку значения  $np_i$ , соответствующие четырем последним интервалам разбиения, не превышают пяти единиц, объединим эти интервалы в один. Вычислим значение критерия  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \frac{(14-14,140)^2}{14,140} + \frac{(16-15,620)^2}{15,620} + \frac{(9-8,815)^2}{8,815} + \frac{(4-4,975)^2}{4,975} + \frac{(7-6,450)^2}{6,450} = 0,252.$$

Критическое значение критерия, соответствующее значениям  $\alpha=0,05$  и  $\nu=k-r-1=5-1-1=3$ :

$$\chi_{\alpha,\nu}^2 = \chi_{0,05;3}^2 = 7,82.$$

Поскольку  $\chi^2 < \chi_{\alpha,\nu}^2$ , можно сделать вывод о том, что проверяемая гипотеза об экспоненциальном законе распределения изучаемой случайной величины  $X$  не противоречит экспериментальным данным и нет основания для отклонения нулевой гипотезы.

**Критерий «согласия» А. Н. Колмогорова.** Он применяется для проверки гипотез  $H_0: F_\xi(x) = F^*(x)$  о виде функции распределения только непрерывных случайных величин, когда параметры гипотетической функции распределения  $F^*(x)$  точно известны [11].

В отличие от критерия  $\chi^2$  Пирсона, где сравниваются гипотетические и эмпирические частоты ( $np_i$  и  $m_i$ ) попадания значений величины в интервалы статистического ряда распределения, критерий «согласия»  $\lambda$  Колмогорова сравнивает гипотетические и эмпирические функции распределения  $F^*(x)$  и  $\hat{F}(x)$  (рисунок 3.13).

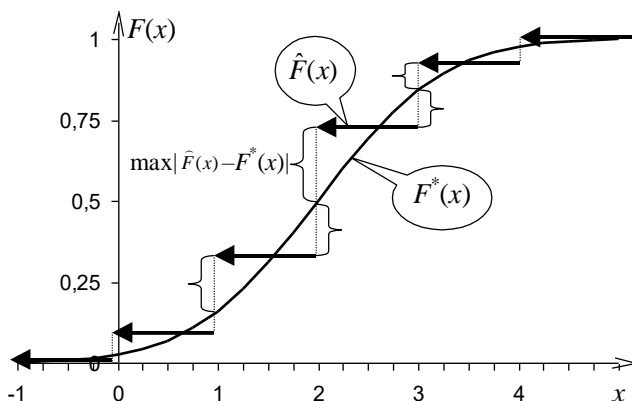


Рисунок 3.13 – Определение максимального отклонения гипотетической и эмпирической функций распределения величины  $\xi$

Для проверки гипотезы используется статистический критерий значимости  $\lambda$ , равный максимальному отклонению эмпирической и гипотетической функций распределения, т. е.:

$$\lambda = \max_x |\hat{F}(x) - F^*(x)| \sqrt{n},$$

где  $\hat{F}(x)$ ,  $F^*(x)$  – значения эмпирической и гипотетической функций распределения соответственно;  
 $n$  – объем выборки.

В случае идеального согласования гипотезы с выборочными данными критерий  $\lambda$  примет значение, равное нулю. В противном случае критерий  $\lambda$  принимает большие положительные значения.

Если наблюдаемое значение  $\hat{\lambda}$  меньше критического  $\lambda_{\text{крит}}$ , определяемого для заданного уровня значимости  $\alpha$  и объема выборки  $n$  [11, 12], то гипотеза  $H_0$  согласуется с результатами опытов и оснований для ее отклонения нет. В противном случае (когда  $\hat{\lambda} > \lambda_{\text{крит}}$ ) гипотеза  $H_0$  отклоняется, и с вероятностью ошибки  $\alpha$  можно утверждать, что верна гипотеза  $H_a$ :  $F_{\xi}(x) \neq F^*(x)$ .

Несмотря на вышеупомянутые ограничения, критерий  $\lambda$  Колмогорова, по сравнению с критерием  $\chi^2$  Пирсона, обладает рядом преимуществ. Во-первых, критерий Колмогорова построен на индивидуальных (а не сгруппированных) значениях случайной величины, поэтому результаты анализа не зависят от способа группировки данных. При этом из исследования исключается субъективный фактор. Во-вторых, критерий  $\lambda$  можно применять для проверки гипотезы о виде распределения случайной величины на основе меньшего объема выборки (от 20–30 элементов).

**Пример.** Проверим соответствие гипотезы об экспоненциальном распределении данных о повреждении электропроводки автомобиля. Исходные данные:  $t_i$  – время безотказной работы,  $m_i$  – количество наблюдений и необходимые расчёты сведены в таблицу 3.9.

**Таблица 3.9 – Исходные данные и расчеты для проверки гипотезы об экспоненциальном распределении**

| $i$ | $t_i$ | $m_i$ | $q_i = m_i/n$ | $\sum q_i$ | $\frac{t_i}{T_{\text{cp}}}$ | $F = 1 - e^{-\frac{t_i}{T_{\text{cp}}}}$ | $D(t) =  \sum q_i - F $ |
|-----|-------|-------|---------------|------------|-----------------------------|--|-------------------------|
| 1   | 0,091 | 1     | 0,143         | 0,143      | 0,265                       | 0,233                                    | 0,09                    |
| 2   | 0,143 | 1     | 0,143         | 0,286      | 0,385                       | 0,320                                    | 0,034                   |
| 3   | 0,167 | 1     | 0,143         | 0,429      | 0,435                       | 0,353                                    | 0,076                   |
| 4   | 0,2   | 2     | 0,286         | 0,715      | 0,495                       | 0,390                                    | 0,325                   |
| 5   | 0,25  | 1     | 0,143         | 0,858      | 0,575                       | 0,437                                    | 0,421                   |
| 6   | 1     | 1     | 0,143         | 1          | 0,965                       | 0,619                                    | 0,381                   |
| 7   | 1,1   | 1     | 0,143         | 1          | 0,97                        | 0,621                                    | 0,379                   |

Максимальному отклонению  $D_n = 0,421$  при  $n = 7$  соответствует  $\lambda_n = 0,421 \cdot 7^{0,5} = 1,11$ .

По таблице значений  $P(\lambda)$  критерия Колмогорова при  $\lambda_n = 1,11$   $P(0,75) = 0,175$  (с аппроксимацией). Эта вероятность достаточно велика, поэтому гипотеза о экспоненциальном законе распределения имеющихся выборочных данных отвергается.

### 3.2.4 Точность оценки. Доверительный интервал

*Интервальной* называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Пусть для параметра  $a$  случайной величины получена оценка  $a^*$ . Необходимо оценить возможную при этом ошибку;  $\delta$  – точность оценки.

*Надежностью (доверительной вероятностью)* называют вероятность, с которой выполняется неравенство  $|a - a^*| < \delta$ :

$$P(|a - a^*| < \delta) = \beta.$$

Тогда  $P(a^* - \delta < a < a^* + \delta) = \beta$ .

Ширина доверительного интервала характеризует точность выборочной оценки, а доверительная вероятность  $\beta$  – достоверность оценки. Чем меньше  $\beta$ , тем шире доверительный интервал. Обычно  $\beta$  принимается в пределах 0,8–0,99 [12].

**Пример.** За год эксплуатации зарегистрировано  $m = 21$  случайных отказов астрономических реле при переводе на ночное освещение дорог. Число исследуемых реле  $N = 1750$  шт. Оценить средний параметр потока отказов и его доверительные границы с доверительной вероятностью  $\beta = 0,95$ .

*Решение.* Примем гипотезу об экспоненциальном распределении для наработки на отказ, используя следующие выражения:

$$\chi_{\beta; 2m}^2 = \chi_{0,95; 42}^2 = 58,124; \quad \chi_{1-\beta; 2m}^2 = \chi_{0,05; 42}^2 = 28,144;$$

$$\lambda_n = \frac{\chi_{\beta; 2m}^2}{2N} = \frac{58,124}{2 \cdot 1750} = 1,66 \cdot 10^{-2} \text{ год}^{-1}; \quad \lambda_n = \frac{\chi_{1-\beta; 2m}^2}{2N} = \frac{20,144}{2 \cdot 1750} = 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ год}^{-1}.$$

## 3.3 Основы многомерного статистического анализа

### 3.3.1. Классификация задач многомерного статистического анализа

На практике часто встречаются объекты с двумя и более случайными величинами, и при разработке моделей сложных систем необходимость многомерного статистического анализа становится очевидной. В таких моделях приходится изучать не только характерные особенности отдельных случайных факторов, но и их **взаимодействие**. При этом возможны различные подходы к выявлению и оценке такого взаимодействия.

Объект исследования можно представить в виде "черного ящика" с "входами" и "выходами" (рисунок 3.14), среди которых различают:

$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  – вектор **входных контролируемых** переменных, которыми **можно управлять** в исследовании;

$Z = (z_1, z_2, \dots, z_p)$  – вектор **входных контролируемых** переменных, которыми **невозможно управлять** в исследовании;

$E = (e_1, e_2, \dots, e_r)$  – вектор **входных неконтролируемых и неуправляемых** переменных (*шум*);

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_g)$  – вектор **выходных** переменных.

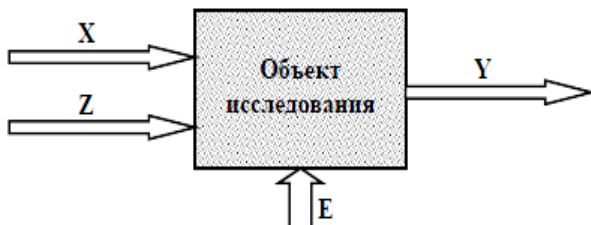


Рисунок 3.14 – Объект исследования в виде "черного ящика"

Переменные  $X$ ,  $Z$  и  $Y$  называются факторами. Если фактор принимает фиксированные, детерминированные значения, то они называются *уровнями фактора*. Факторы  $Z$  могут быть случайными. Переменные  $E$  тоже случайные, хотя могут и не описываться законами распределения (могут быть не стохастического, не вероятностного вида), но происхождение их не является предметом исследования, они связаны с погрешностями эксперимента или моделирования. Если факторы  $Z$  случайны, то и выходные переменные  $Y$  необходимо рассматривать как случайные. В частности, такого рода случайности могут быть вызваны наложением шума  $E$ .

Рассмотрим некоторые виды задач статистического анализа, которые могут возникнуть при изучении сложных *многофакторных систем*.

1. Существует ли **связь** между отдельными факторами.
2. Если между факторами есть связь, то насколько она **тесная**.
3. Если между какими-то факторами есть связь, то какой функцией ее можно **представить**.
4. Какие входные факторы оказывают на определенные выходные наибольшее **влияние**.
5. Какие входные факторы можно **отбросить** из процесса изучения на основании их слабого, сравнимого с шумом, влияния.
6. Существуют ли **неучтенные** факторы, которые необходимо рассматривать ввиду их существенного влияния на выходные.
7. Существуют ли **обобщенные** факторы, которыми можно заменить несколько рассматриваемых.
8. Как связаны между собой **зашумленные** факторы.
9. Каковы **характеристики шума**.
10. Как **выделить** "полезную" информацию из зашумленной.

Все эти задачи можно решить с помощью методов многомерного статистического анализа, включающего в себя:

- корреляционный анализ (КА);
- регрессионный анализ (РА);
- конфлюэнтный анализ;
- дисперсионный анализ (ДА);
- факторный анализ (ФА);
- теорию фильтрации.

Каждый из этих разделов – совокупность методов и приемов математической статистики. Исторически так сложилось, что четкого разграничения указанных разделов и методов между разделами не существует. Выбор методов диктуется лишь конкретной практической задачей. Так, например, задачи 1, 2 вышеприведенного списка решаются методами КА, задача типа 3 – РА. Задачи 4, 5, 6 относятся к задачам ДА, 7 – ФА, а 8, 9 – конфлюэнтного. Теория фильтрации позволяет решить задачи типа 10 и частично 9.

Каждый из перечисленных видов статистического анализа, по сути, предназначен для обоснования той или иной *статистической математической модели* изучаемого оригинала. Корреляционный анализ позволяет получить корреляционную модель, регрессионный анализ – регрессионную, конфлюэнтный – конфлюэнтную, дисперсионный – дисперсионную. Возможность решения перечисленных задач вытекает из физического **смысла** основных **числовых характеристик** случайных величин: дисперсии или среднего квадратического отклонения и коэффициента корреляции.

Конечной целью и основной *задачей корреляционного анализа* и является построение совместного **закона** распределения системы случайных величин.

*Задачей регрессионного анализа* составляет исследование вида и формы корреляции: какой функцией можно **представить** связь случайных величин – *регрессию* – уравнение для условной средней.

Некоторые авторы считают регрессионный анализ частью корреляционного, некоторые считают его методы самостоятельными. Однако эти методы могут предложить лишь то или иное выражение связи, они не отвечают на вопрос о наличии собственно функциональной **зависимости** – такая постановка вопроса возможна только в профессиональном плане исследования объекта, а не в формальном математическом.

*Задачей конфлюэнтного анализа* является изучение **структуры** случайных величин, находящихся в некотором взаимодействии [2]. Наибольшее развитие у основоположника многомерного статистического анализа Р. Фишера получил *дисперсионный анализ*, основной задачей которого является **сравнение дисперсий** разных случайных величин или различных способов вычисления дисперсий.

*Факторный анализ* решает задачу поиска минимального числа обобщенных факторов, заменяющих исходное множество.

*Задачей теории фильтрации* является выделение исходного сигнала из искаженной или неполной информации [2].

### 3.3.2 Регрессионный анализ

Часто в практике инженерных и научных исследований результат испытания характеризуется набором случайных величин, т. е. многомерной случайной величиной. Например, влияние погодных условий характеризуется температурой, давлением, влажностью, направлением и скоростью ветра.

Многомерные случайные величины характеризуются многомерными законами распределения. Наряду с числовыми характеристиками, применимыми для одномерных СВ (математическим ожиданием, дисперсией и др.), многомерные случайные величины определяются дополнительными числовыми характеристиками, описывающими зависимость между ее компонентами.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением двумерной СВ  $(X, Y)$ , компоненты  $X$  и  $Y$  которой фактически являются одномерными СВ.

Зависимость между случайными величинами, при которой каждому значению  $x$  случайной величины  $X$  однозначно ставится в соответствие единственное значение  $y$  СВ  $Y$ , называется *функциональной*. Например, зная напряжение  $U$  на участке электрической цепи сопротивлением  $R$ , можно однозначно определить величину тока ( $I = U/R$ ); зная скорость движения поезда  $v$ , можно однозначно определить время  $T$  его движения по перегону.

Однако часто на практике одному значению СВ  $X$  может соответствовать не одно, а множество значений СВ  $Y$ , характеризующихся для каждого  $X = x$  условным распределением с плотностью вероятностей  $f(y|X=x)$ . Такая зависимость называется *статистической*. Примером статистической зависимости является зависимость величины потребления электроэнергии на перегоне электровозом ( $Y$ ) от массы поезда ( $X$ ), т. к. одному значению массы состава могут соответствовать различные значения потребления электроэнергии (кроме массы состава на электропотребление влияют скорость движения, профиль и состояние пути, состояние подвижного состава, направление и скорость ветра и прочие факторы).

Таким образом, при фиксированном значении  $x_i$  влияющей величины  $X$  значения зависимой величины  $Y$  по-прежнему являются случайными и определяются условным законом распределения (при условии, что  $X = x_i$ ). Изменение условного закона распределения СВ  $Y$  при изменении значения  $X$  может проявляться как при изменении вида распределения (рисунок 3.15, *а*), так и при изменении его числовых характеристик (рисунок 3.15, *б*), например, математического ожидания.

Если условный закон распределения [например,  $f(y|X=x)$ ] одной из величин не изменяется при изменении значения другой случайной величины  $X$ , то такие величины называются *независимыми*. Например, температура воздуха  $Y$  завтра в полдень не зависит от скорости движения автомобиля  $X$ . Независимыми являются случайные величины, не связанные причинно-следственными связями.



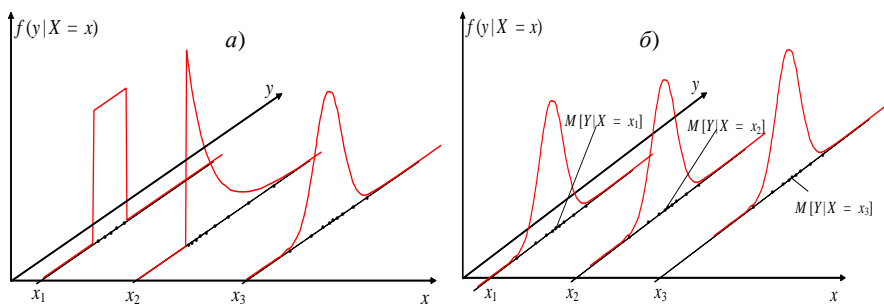


Рисунок 3.15 – Примеры статистической зависимости: с изменением вида закона распределения (а), с изменением только лишь математического ожидания (б)

Исследование зависимостей между случайными величинами является наиболее часто используемым приложением математической статистики и применяется главным образом для предсказания значения одной СВ по значению другой. Чаще всего ограничиваются изучением *регрессионной* зависимости, которая каждому значению одной СВ ставит в соответствие условное математическое ожидание другой СВ  $M[Y|X=x]$ . Предметом *регрессионного* анализа является нахождение вида уравнения регрессионной зависимости между случайными величинами. Предметом же *корреляционного* анализа является оценка тесноты связи между СВ, а также оценка качества описания зависимости выбранным уравнением регрессии [14].

**Регрессионный анализ** предназначен для решения единственной задачи получения теоретического *уравнения регрессии*, вид которого задается, исходя из особенностей изучаемой системы случайных величин. *Регрессия* – функциональная зависимость, *аппроксимирующая* (заменяющая) статистическую зависимость средних значений рассматриваемых факторов (переменных).

Рассмотрим последовательные шаги решения общей задачи регрессионного анализа.

1. **Задание вида** линии *регрессии* – важнейший этап. Основные соображения о виде функции должны диктоваться только реальными **физическими** свойствами изучаемого явления, например, возрастание/убывание, выпуклость/вогнутость, наличие замечательных точек (известные значения координат отдельных точек, экстремумов и перегибов), асимптот, периодов, свойств симметрии, гладкости и т. д. *И только дополнительные мотивы могут служить графические построения выборочной корреляционной зависимости.*

2. Вычисление *выборочных оценок* параметров предполагаемого теоретического закона распределения:  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $r_{xy}$ .

3. *Проверка гипотезы* о равенстве нулю коэффициента корреляции. Этот шаг нужен для выяснения вопроса о необходимости дальнейшего анализа. Если исследуемые случайные величины по результатам выборки можно

считать некоррелированными, то бесполезно пытаться строить регрессию и следует прекратить анализ или вернуться к пункту 1.

4. Проверка гипотез о законах распределения исследуемых случайных величин. Это необходимо для метода наибольшего правдоподобия и может быть проделано с помощью критерия согласия Пирсона.

5. Для отыскания параметров линии регрессии используется метод наибольшего правдоподобия, дающий несмещенные их оценки и не предъявляющий каких-либо требований к законам распределения случайных величин. Правда, применить этот метод можно только тогда, когда последние известны. Поэтому и необходим предыдущий шаг.

6. Уравнение регрессии можно считать окончательным только после подтверждения дисперсионным анализом, т. е. "погрешность" замены статистической регрессии аппроксимирующей зависимостью. Проверка производится по критерию Фишера с  $(k - v, N - k)$  степенями свободы.

Пусть дана выборка значений двумерной СВ  $(X, Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)\}$ , где  $n$  – объем двумерной выборки. Первым шагом в построении эмпирического уравнения регрессии между СВ является графическое отображение значений двумерной СВ в виде точек  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  на плоскости  $X$ - $Y$ , называемое диаграммой рассеяния (корреляционным полем) (рисунок 3.16).

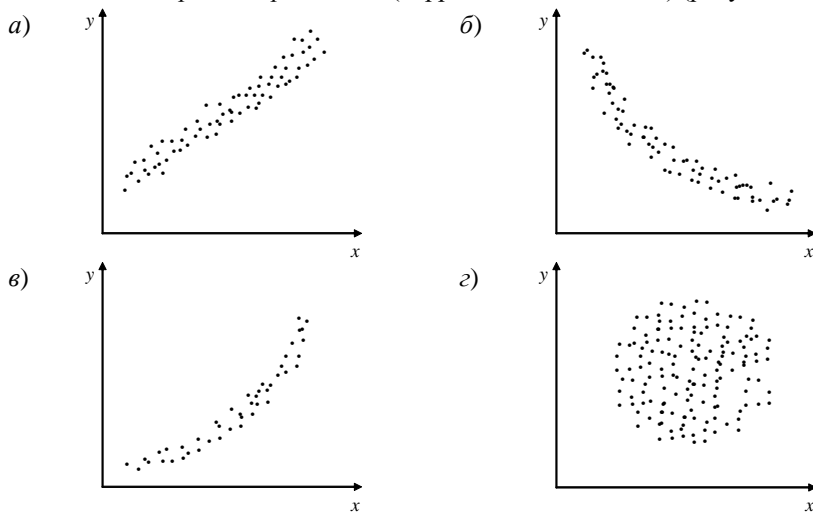


Рисунок 3.16 – Диаграмма рассеяния, соответствующая линейной (а), экспоненциальной (б), параболической (в) регрессионной зависимости и отсутствию регрессионной зависимости (г)

Визуальный анализ диаграммы рассеяния и предметная постановка задачи (физический смысл рассматриваемых величин) позволяет сделать предположение о виде уравнения регрессии. Если предполагается, что зави-

симость между СВ  $X$  и  $Y$  линейна (рисунок 3.16,  $a$ ), то теоретическая модель регрессионной зависимости между СВ задается уравнением

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $y_i$  –  $i$ -е выборочное значение СВ  $Y$ ;

$\beta_0, \beta_1$  – параметры линейной регрессии, требующие определения;

$x_i$  –  $i$ -е выборочное значение СВ  $X$ ;

$e_i$  – ошибка, вызванная отклонением  $i$ -го наблюдения СВ  $Y$  от условного среднего  $M[Y|X=x_i]$ . Ошибки  $e_i$  обуславливаются упрощением вида зависимости  $Y$  от  $X$  (без учёта всех влияющих факторов), а также возможной ошибкой в выборе формы регрессии (в действительности она может описываться другим уравнением). **Метод наименьших квадратов.** Для оценивания параметров уравнения регрессии  $\beta_0, \beta_1, \dots$  наиболее часто применяется метод наименьших квадратов (МНК). Идею МНК продемонстрируем на примере определения параметров линейной регрессионной зависимости.

Для случая линейной регрессии оценки параметров  $\hat{\beta}_0$  и  $\hat{\beta}_1$  получаются минимизацией по  $\hat{\beta}_0$  и  $\hat{\beta}_1$  суммы квадратов отклонений  $e_i$  выборочных значений СВ  $Y$  от значений, предсказываемых уравнением регрессии  $Y$  на  $X$ . Полученные значения  $\hat{\beta}_0$  и  $\hat{\beta}_1$  называются оценками параметров регрессии и вычисляются по формулам

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

В результате оценка уравнения линейной регрессии (эмпирическое уравнение линейной регрессии, прямая, полученная МНК) будет иметь вид

$$\bar{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x.$$

Метод наименьших квадратов применим для оценивания параметров уравнений регрессии произвольного вида (гиперболической, параболической, экспоненциальной, логарифмической и т. д.).

**Пошаговый регрессионный анализ.** В случае, если по виду диаграммы рассеяния сложно выдвинуть предположение о виде регрессионной зависимости, рекомендуется использовать пошаговый регрессионный анализ. Для этого уравнение регрессии выбирают как можно более сложным, содержащим большое количество слагаемых. Например,

$$\bar{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 / x + \hat{\beta}_2 x + \hat{\beta}_3 x^2 + \hat{\beta}_4 x^3 + \hat{\beta}_5 e^x.$$

Стандартная пошаговая процедура позволяет в записанном уравнении

регрессии выбрать те слагаемые, совокупность которых достаточно качественно предсказывает среднее значение зависимой СВ, и отбросить те слагаемые, которые существенно не улучшают предсказание СВ  $Y$ .

Особенно полезен пошаговый регрессионный анализ в случае множественной регрессии, когда СВ  $Y$  зависит от нескольких независимых случайных величин  $X_1, X_2, X_3$  и т. д. При этом пошаговая процедура позволяет из множества влияющих (независимых) СВ исключить несущественные и тем самым упростить уравнение регрессии (данную процедуру можно реализовать в программах статистической обработки данных, например, MS Excel [15], Statistica [15], Statgraphics [16], SPSS [36]).

### 3.3.3 Корреляционный анализ

Помимо предположения о форме уравнения регрессионной зависимости между случайными величинами и нахождения параметров уравнения исследователю необходимо оценить, насколько удачно выбранная регрессионная модель объясняет существующую зависимость между исследуемыми СВ.

**Корреляционный анализ** – группа статистических методов установления формы и тесноты корреляционной связи между факторами.

*Коэффициент корреляции.* Основной числовой характеристикой, определяющей тесноту линейной связи между двумя случайными величинами, является коэффициент корреляции

$$r = \frac{M[XY] - M[X]M[Y]}{\sigma[X]\sigma[Y]},$$

где  $M[XY]$  – математическое ожидание произведения СВ  $X$  и  $Y$ .

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной и может принимать значения из интервала  $-1 \leq r \leq 1$ . Для линейно независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  коэффициент корреляции равен нулю. Чем теснее линейная зависимость между двумя СВ, тем больше коэффициент корреляции отличается от нуля. Экстремальные значения  $-1$  или  $1$  коэффициента корреляции соответствуют линейной функциональной зависимости между двумя СВ (отрицательной и положительной соответственно). Положительная зависимость указывает на увеличение значения одной величины при увеличении значения другой величины. Например, стаж и производительность труда рабочих; время подготовки к экзамену и полученная оценка. Для отрицательной зависимости характерно уменьшение значения одной из величин при увеличении значения другой величины.

Таким образом, можно говорить, что коэффициент корреляции характеризует тесноту линейной регрессионной зависимости между двумя СВ, т. е. близость ее к линейной функциональной зависимости. По заданной двумерной выборке оценку коэффициента корреляции  $\hat{r}$  можно найти по формуле

$$\hat{r} = \frac{\sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

*Коэффициент детерминации.* Для характеристики качества описания зависимости между двумя СВ произвольным уравнением регрессии используется коэффициент детерминации  $\hat{R}^2$ . Чем лучше линия регрессии аппроксимирует точки на диаграмме рассеяния, тем больше значение  $\hat{R}^2$  и тем надежнее уравнение регрессии может быть применено для практических расчетов.

Оценка коэффициента детерминации может принимать значения в интервале от нуля до единицы ( $0 \leq \hat{R}^2 \leq 1$ ) и определяется выражением

$$\hat{R}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y}(x_i) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

где  $n$  – объем выборки;

$\bar{y}(x_i)$  – значение СВ  $Y$ , предсказываемое уравнением регрессии;

$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  – безусловное среднее СВ  $Y$ ;

$y_i$  –  $i$ -е выборочное значение СВ  $Y$ .

Отметим, что коэффициент детерминации не является мерой какой-либо зависимости априорно (как это справедливо для коэффициента корреляции, который всегда характеризует степень линейной зависимости между двумя СВ), он лишь оценивает степень приближения выбранного уравнения регрессионной зависимости к действительной зависимости между двумя СВ. Близость коэффициента детерминации к нулю указывает на то, что выбранное уравнение регрессии (модель зависимости) незначимо объясняет существующую зависимость между СВ. Равенство же коэффициента детерминации единице указывает на то, что выбранное уравнение регрессии полностью (однозначно) определяет зависимость между СВ. Если значение коэффициента детерминации больше 0,7, то считают, что выбранное уравнение регрессии хорошо описывает зависимость, существующую между случайными величинами. Если же коэффициент детерминации меньше 0,3, то уравнение регрессии незначительно описывает зависимость между случайными величинами, если таковая существует.

**Проверка значимости оценок коэффициентов корреляции и детерминации.** Оценки коэффициентов корреляции и детерминации сами являются случайными величинами, так как для различных выборок из одной и той же генеральной совокупности могут принимать различные значения.

При малых объемах выборок эти различия будут особенно существенными. Поэтому при нахождении оценок коэффициентов корреляции и детерминации используется проверка значимости этих оценок, которая позволяет сделать вывод о существенности описания действительной зависимости выбранным уравнением регрессии.

Проверка значимости  $\hat{r}$ . Чтобы сделать статистический вывод о значимости оценки коэффициента корреляции (при проверке линейной регрессионной зависимости) выдвигается нулевая гипотеза об отсутствии линейной зависимости между исследуемыми СВ (т. е.  $H_0: r=0$ ;  $H_a: r \neq 0$ ). Если гипотеза  $H_0$  отклоняется, то считается, что уравнение регрессии  $Y$  на  $X$  действительно имеет линейный вид.

Для проверки гипотезы  $H_0$  вычисляется  $t$ -статистика:

$$\hat{t} = \hat{r} \sqrt{\frac{n-2}{1-\hat{r}^2}}.$$

При условии справедливости гипотезы  $H_0$  рассчитанная  $t$ -статистика имеет распределение Стьюдента с  $n-2$  степенями свободы. Значение  $\hat{t}$  сравнивается с критическим значением  $t_{\alpha, \nu}$  при  $\nu = n-2$  степенях свободы. Если расчетное значение  $\hat{t}$  по абсолютной величине превосходит табличное для заданного уровня значимости  $\alpha$ , то нулевая гипотеза  $H_0$  о линейной независимости двух СВ отклоняется, и с вероятностью ошибки  $\alpha$  можно утверждать, что существует линейная зависимость.

Проверка значимости  $\hat{R}^2$ . При выполнении процедуры проверки значимости оценки коэффициента детерминации выдвигается нулевая гипотеза о том, что предложенное уравнение регрессии никак не отражает реальную зависимость между СВ, т. е. при  $H_0 \hat{R}^2 = 0$ . Альтернативная гипотеза заключается в том, что выбранная модель зависимости (уравнение регрессии)  $\bar{y}(x_i)$  в достаточной степени объясняет действительную зависимость между случайными величинами, т. е. при  $H_a \hat{R}^2 > 0$ .

Для проверки значимости оценки коэффициента детерминации используется статистика

$$\hat{F} = \hat{R}^2 \frac{n-m}{(m-1)(1-\hat{R}^2)},$$

имеющая  $\hat{F}$ -распределение Фишера с  $\nu_1 = m-1$  и  $\nu_2 = n-m$  степенями свободы. Здесь  $m$  – число неизвестных параметров предполагаемого уравнения регрессии ( $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ ). Значение статистики, вычисленное по формуле, сравнивается с критическим значением  $F_{\nu_1, \nu_2, \alpha}$ , найденным по таблицам квантилей распределения Фишера при заданном уровне значимости и соответ-

ствующем числе степеней свободы. Если  $\hat{F} > F_{v_1, v_2, \alpha}$ , то нулевая гипотеза отклоняется, вычисленный коэффициент детерминации значимо отличается от нуля, и с вероятностью ошибки  $\alpha$  можно утверждать, что между исследуемыми величинами существует зависимость предложенного вида, и полученное уравнение регрессии может использоваться в дальнейших исследованиях.

**Пример.** По результатам десяти совместных измерений скорости движения автомобиля  $X$ , км/ч, и выбросов загрязняющего вещества в атмосферный воздух  $Y$ , мг/м<sup>3</sup>, представленных в таблице 3.10, следует исследовать зависимость между данными величинами с целью прогнозирования величины выбросов загрязняющего вещества при заданной скорости движения.

Таблица 3.10 – Исходные данные

|     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $X$ | 40,23 | 19,63 | 29,01 | 89,14 | 74,96 | 57,89 | 34,33 | 21,01 | 16,69 | 9,24  |
| $Y$ | 50,66 | 67,82 | 60,95 | 65,53 | 46,84 | 52,91 | 43,71 | 70,52 | 67,02 | 89,96 |

*Решение.* На величину выбросов загрязняющего вещества автомобилем  $Y$ , помимо скорости движения  $X$ , влияние оказывают масса, профиль и качество дорожного полотна, состояние транспортного средства и другие факторы. Поэтому зависимость между величиной выбросов загрязняющего вещества  $Y$  и скоростью движения  $X$  является статистической: на одной скорости движения при различных дополнительных условиях выбросы загрязняющего вещества автомобиля могут принимать различные значения. Диаграмма рассеяния исследуемых величин представлена на рисунке 3.17.

Характер расположения точек на диаграмме рассеяния позволяет сделать предположение о параболической регрессионной зависимости

$$\bar{y}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_2 x^2.$$

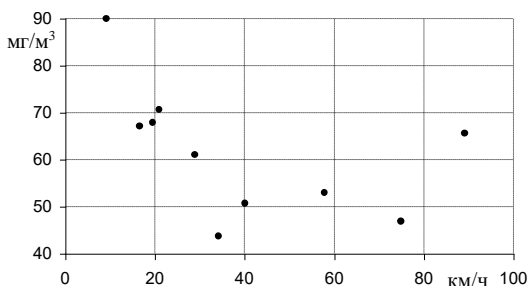


Рисунок 3.17 – Диаграмма рассеяния случайных величин  $X$  и  $Y$

Оценки параметров  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  найдем методом наименьших квадратов:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i - \hat{\beta}_0 n - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0; \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = 0; \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = 0. \end{cases}$$

Для вычисления значений сумм составим расчетную таблицу 3.11.

**Таблица 3.11 – Результаты промежуточных вычислений**

| $N$      | $x_i$  | $y_i$  | $x_i^2$ | $x_i y_i$ | $x_i^3$   | $x_i^4$     | $x_i^2 y_i$ |
|----------|--------|--------|---------|-----------|-----------|-------------|-------------|
| 1        | 40,23  | 50,66  | 1618,45 | 2038,05   | 65110,36  | 2619389,79  | 81990,82    |
| 2        | 19,63  | 67,82  | 385,34  | 1331,31   | 7564,16   | 148484,53   | 26133,55    |
| 3        | 29,01  | 60,95  | 841,58  | 1768,16   | 24414,24  | 708257,06   | 51294,31    |
| 4        | 89,14  | 65,53  | 7945,94 | 5841,34   | 708301,06 | 63137956,13 | 520697,42   |
| 5        | 74,96  | 46,84  | 5619,00 | 3511,13   | 421200,36 | 31573178,98 | 263194,03   |
| 6        | 57,89  | 52,91  | 3351,25 | 3062,96   | 194003,98 | 11230890,64 | 177314,75   |
| 7        | 34,33  | 43,71  | 1178,55 | 1500,56   | 40459,58  | 1388977,51  | 51514,37    |
| 8        | 21,01  | 70,52  | 441,42  | 1481,63   | 9274,24   | 194851,70   | 31128,95    |
| 9        | 16,69  | 67,02  | 278,56  | 1118,56   | 4649,10   | 77593,50    | 18668,83    |
| 10       | 9,24   | 89,96  | 85,38   | 831,23    | 788,89    | 7289,33     | 7680,57     |
| $\Sigma$ | 392,13 | 615,92 | 21745,5 | 22484,9   | 1475766   | 111086869,2 | 1229617,6   |

После подстановки значений система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 615,92 - 10\hat{\beta}_0 - 392,13\hat{\beta}_1 - 21745,47\hat{\beta}_2 = 0; \\ 22484,93 - 392,13\hat{\beta}_0 - 21745,47\hat{\beta}_1 - 1475765,97\hat{\beta}_2 = 0; \\ 1229617,6 - 21745,5\hat{\beta}_0 - 1475765,97\hat{\beta}_1 - 111086869,2\hat{\beta}_2 = 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений известными методами или с помощью MATHCAD, получим следующее решение:  $\hat{\beta}_0 = 103$ ;  $\hat{\beta}_1 = -2,096$ ;  $\hat{\beta}_2 = 0,01875$ , а уравнение регрессии примет вид

$$\bar{y}(x) = 103 - 2,096x + 0,01875x^2.$$

Оценим качество описания зависимости между выбросами загрязняющего вещества автомобиля ( $Y$ ) и скоростью его движения ( $X$ ) полученным уравнением регрессии с помощью коэффициента детерминации:

$$\hat{R}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y}(x_i) - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 0,8447.$$

Расчётное значение коэффициента детерминации  $\hat{R}^2 = 0,844708$  указывает на удовлетворительность описания зависимости между величиной скорости ( $X$ ) и выбросами загрязняющего вещества ( $Y$ ) выбранным уравнением регрессии. Проверим, однако, значимость оценки коэффициента детерминации с помощью статистики Фишера:



$$\hat{F} = 0,8447 \cdot \frac{10-3}{(3-1)(1-0,8447)} = 19,04.$$

На рисунке 3.18 представлена диаграмма рассеяния случайных величин  $X$  и  $Y$  с нанесённой линией регрессии.

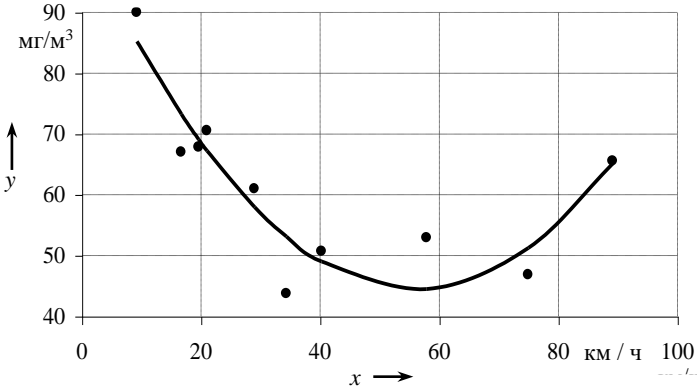


Рисунок 3.18 – Диаграмма рассеяния случайных величин  $X$  и  $Y$  с нанесённой линией регрессии

*Вывод.* Критическое значение статистики Фишера для степеней свободы  $\nu_1 = 3 - 1 = 2$  и  $\nu_2 = 10 - 3 = 7$  и уровня значимости  $\alpha = 0,05$  составляет  $F_{0,05;2;7} = 4,737$ . Поскольку расчётное значение статистики Фишера больше критического ( $\hat{F} = 19,03818 > 4,737 = F_{0,05;2;7}$ ), то вычисленный коэффициент детерминации значимо отличается от нуля и выбранное уравнение регрессионной зависимости может быть использовано в практических целях.

### 3.3.4 Дисперсионный анализ

Дисперсионный анализ разработан Р. Фишером в 1920 году и представляет собой группу методов математической статистики для анализа результатов наблюдений, зависящих от **нескольких** одновременно действующих факторов, как случайных, так и детерминированных, как наблюдаемых, так и ненаблюдаемых.

На современном этапе развития теории вероятностей, основными причинами случайности (непредсказуемости) явлений считаются невозможность учета всех факторов, влияющих на рассматриваемое явление, и ограниченная точность физических измерений.

При прогнозировании случайных явлений исследователи стараются учитывать как можно большее количество влияющих факторов. Например, при определении температуры окружающей среды на следующий день учитывается температура за прошедшую неделю, влажность, давление, расположение атмосферных фронтов, скорость и направление ветра, температура в приле-

гающих областях, фаза луны, солнечная активность и другие факторы. Однако учесть все факторы (например, солнечную активность) бывает сложно или невозможно. Поэтому ограничиваются лишь значимо влияющими факторами. Вопрос о значимости влияния (в частности, случайной величины) тех или иных факторов может быть решен методами *дисперсионного анализа*.

Основной целью дисперсионного анализа является проверка свойств распределения некоторой случайной величины, основанное на выборочных данных. Происхождение названия “дисперсионный анализ” связано с тем, что при исследовании статистической значимости различия между средними значениями двух (или нескольких) групп на самом деле сравниваются (т. е. анализируются) их выборочные дисперсии.

Сущностью дисперсионного анализа является расчленение общей дисперсии на части, одна из которых обусловлена случайной ошибкой (т. е. внутригрупповой изменчивостью), а вторая связана с различием средних значений. Последняя компонента дисперсии затем используется для анализа статистической значимости различия между средними значениями. Если это различие значимо, нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза о существовании различия.

Переменные, значения которых определяются с помощью измерений в ходе эксперимента (например, количество отказавших транзисторов), называются *зависимыми* переменными. Переменные, которыми можно управлять при проведении эксперимента (например, значение напряжения, тока, частоты, температуры) называются *факторами* или *независимыми* переменными (дисперсионный анализ удобно выполнять в программах статистической обработки данных, например, Statistica или Statgraphics [1, 2]).

При разработке математического аппарата Фишеру потребовалось сделать следующие *предположения дисперсионного анализа*, необходимые для обоснованности выкладок и выводов:

- 1) исследуемые факторы **независимы**. С точки зрения способов отбора информации это означает независимость выборочных результатов наблюдения (отдельных выборок или слоев – они не преобразуются друг в друга с помощью какого-либо алгоритма);
- 2) исследуемые факторы, каждый по отдельности, подчиняются **нормальным** законам распределения;
- 3) **дисперсии** исследуемых факторов **однородны** (априори приблизительно одного порядка).

В зависимости от количества учитываемых факторов дисперсионный анализ может быть одно- или многофакторным. Предметом *однофакторного дисперсионного анализа* является проверка того, зависит ли математическое ожидание случайной величины  $\xi$  от некоторого фактора. Например, влияет ли форма импульсов электромагнитных помех на помехоустойчивость компьютера системы управления.

*Многофакторный дисперсионный анализ* позволяет проверить, оказывают ли влияние на математическое ожидание случайной величины  $\xi$  определенные факторы (которые можно варьировать в ходе эксперимента), а также выбрать наиболее важные факторы и оценить степень их влияния. Например, какие из факторов (частота импульсов помех, их длительность, амплитуда, форма, каналы проникновения и пр.) значительно ухудшают качество работы электронного оборудования, и, следовательно, какие меры должны быть предприняты для увеличения помехозащищенности и помехоустойчивости оборудования в первую очередь.

**Однофакторный дисперсионный анализ.** Идея однофакторного дисперсионного анализа заключается в разложении общей дисперсии (разброса) случайной величины  $\xi$  на два независимых слагаемых – факторную дисперсию (разброс, порождаемый воздействием исследуемого фактора  $A$ ) и остаточную дисперсию, обусловленную другими неучтенными воздействиями, т. е.  $D[\xi] = D_{\text{факт}} + D_{\text{ост}}$ . Чем сильнее фактор  $A$  влияет на значение величины  $\xi$  в массе всех влияющих факторов, тем больше факторная дисперсия  $D_{\text{факт}}$  по отношению к остаточной дисперсии  $D_{\text{ост}}$ . В результате сравнения факторной и остаточной дисперсий по критерию Фишера  $F = D_{\text{факт}} / D_{\text{ост}}$  приходят к выводу о значимости влияния фактора  $A$ .

С целью изучения влияния фактора  $A$  на случайную величину  $\xi$  результаты эксперимента разбиваются в зависимости от вариации фактора  $A$  на  $k$  групп по  $n_i$  измерений в каждой. Результаты измерений обозначаются через  $x_{ij}$ , где  $i$  – номер уровня фактора  $A$  ( $i = \overline{1, k}$ ),  $j$  – номер результата измерения на данном уровне ( $j = \overline{1, n_i}$ ).

На основе имеющейся статистической информации требуется проверить нулевую гипотезу  $H_0: M[\xi|A_1] = M[\xi|A_2] = \dots = M[\xi|A_k]$  о равенстве условных математических ожиданий величины  $\xi$  при различных значениях уровня фактора  $A$  против альтернативной гипотезы  $H_a$  о том, что не все условные математические ожидания совпадают (а следовательно, их различия вызваны различием уровней влияющего фактора  $A$ ).

Проверка нулевой гипотезы основывается на вычислении статистического критерия значимости

$$F = \frac{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k ((x_i - \bar{x})^2 n_i)}{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_i)^2},$$

который при условии справедливости гипотезы  $H_0$  имеет распределение Фишера с  $\nu_1 = k - 1$  и  $\nu_2 = n - k$  степенями свободы.

Если значение критерия значимости  $F$  окажется больше критического  $F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}$ , определяемого квантилем распределения Фишера с  $\nu_1$  и  $\nu_2$  степеня-

ми свободы уровня  $\alpha$  [14], то с вероятностью ошибки, меньшей  $\alpha$ , можно утверждать, что гипотеза  $H_0: M[\xi|A_1] = M[\xi|A_2] = \dots = M[\xi|A_k]$ , неверна (не все условные математические ожидания равны между собой). Следовательно, с вероятностью ошибки, меньшей  $\alpha$ , можно утверждать, что значения исследуемого фактора  $A$  влияют на значения случайной величины  $\xi$ .

**Замечание.** Дисперсионный анализ основан на нескольких допущениях [2]:

1) результаты измерений  $x_{ij}$  внутри  $i$ -й группы имеют нормальный закон распределения;

2) внутригрупповые дисперсии результатов измерений  $x_{ij}$  при различных уровнях фактора  $A$  одинаковы, т. е.  $D_1 = D_2 = \dots = D_k$ .

*Примечание* – Приведенные условия выполняются в случае, когда количество неучтенных факторов велико, а их совместное действие на величину  $\xi$  компенсируется (в соответствии с центральной предельной теоремой) и не зависит от значений уровней фактора  $A$ . Выполнение второго условия можно проверить с помощью статистического критерия значимости Бартлетта [5].

**Пример 1.** Методом однофакторного дисперсионного анализа проверить влияние помехозащитных мероприятий на качество работы микропроцессора транспортного средства (МК). Испытания проходили 24 микроконтроллера, из них 10 – незащищенных, 7 – с экранированным корпусом и 7 – с заземленным корпусом. Количество сбоев каждого из МК (в процессе испытания) представлено в таблице 3.12 и на рисунке 3.19.

Таблица 3.12 – Результаты испытаний микроконтроллеров

| Помехозащитные меры | Номер образца                                 |    |    |    |    |    |    |    |    |    | Число образцов в группе |
|---------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-------------------------|
|                     | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |                         |
|                     | Количество сбоев образца в процессе испытания |    |    |    |    |    |    |    |    |    |                         |
| 1 Без защиты        | 11  | 9  | 18 | 11 | 17 | 12 | 14 | 16 | 15 | 9  | 10                      |
| 2 Экранирование     | 9   | 11 | 15 | 8  | 9  | 6  | 10 |    |    |    | 7                       |
| 3 Заземление        | 11  | 5  | 8  | 9  | 7  | 4  | 10 |    |    |    | 7                       |

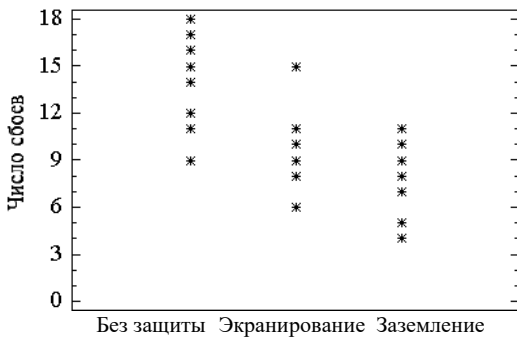


Рисунок 3.19 – Результаты испытаний

Рассмотрим случайную величину  $\xi$  – количество сбоев МК (микропроцессора) в процессе испытания. Для проверки влияния помехозащитных мероприятий на качество работы МК выдвинем нулевую гипотезу о том, что математические ожидания числа сбоев МК при проведении различных помехозащитных мероприятий не отличаются, т. е. при  $H_0$

$$M[\xi | \text{без мероприятий}] = M[\xi | \text{экранирование}] = M[\xi | \text{заземление}].$$

Альтернативная гипотеза состоит в том, что помехозащитные мероприятия изменяют математическое ожидание числа сбоев, т. е. влияют на качество работы МК.

Для проверки нулевой гипотезы вычислим значение статистического критерия значимости  $\hat{F}$ . В данном примере  $n$  – число испытываемых МК ( $n = 24$ ),  $k$  – число групп МК ( $k = 3$ ),  $n_1$  – число МК в 1-й группе (помехонезащищенных,  $n_1 = 10$ ),  $n_2$  – число МК во 2-й группе (использующих экранирование,  $n_2 = 7$ ),  $n_3$  – число МК в 3-й группе (использующих заземление,  $n_3 = 7$ );  $x_{ij}$  – число сбоев  $j$ -го образца из  $i$ -й группы МК,  $\bar{x}_i$  – выборочное среднее число сбоев МК  $i$ -й группы.

$$x_1 = (11 + 9 + 18 + \dots + 15 + 9) / 10 = 13,2 ;$$

$$x_2 = (9 + 11 + 15 + \dots + 6 + 10) / 7 = 9,714 ;$$

$$x_3 = (11 + 5 + 8 + \dots + 4 + 10) / 7 = 7,714 ;$$

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \frac{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k ((x_i - \bar{x})^2 n_i)}{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - x_i)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{3-1} ((13,2 - 10,583)^2 \cdot 10 + (9,714 - 10,583)^2 \cdot 7 + (7,714 - 10,583)^2 \cdot 7)}{\frac{1}{24-3} ((11-13,2)^2 + \dots + (9-13,2)^2 + (9-9,714)^2 + \dots + (10-7,714)^2)} = \frac{65,688}{8,6884} = 7,56. \end{aligned}$$

Найдем критическое значение критерия значимости, как квантиль распределения Фишера уровня  $\alpha = 0,05$  с  $\nu_1 = k - 1 = 3 - 1 = 2$  и  $\nu_2 = n - k = 24 - 3 = 21$  степенями свободы. Поскольку расчетное значение критерия значимости  $\hat{F}$  больше критического ( $\hat{F} = 7,56 > F_{0,05;2;21} = 3,467$ ), то с вероятностью, меньшей  $\alpha = 0,05$ , можно утверждать, что проводимые помехозащитные мероприятия существенно влияют на качество работы МК в условиях внешних электромагнитных помех.

В то же время перечисленные помехозащитные меры могут оказаться несущественными для защиты МК от воздействия помех, поступающих по цепям питания, для чего необходимы дополнительные исследования.

**Пример 2.** Рассмотрим результаты расчета скорости транспортного средства по длине следа торможения с помощью компьютерных программ экспресс-анализа ДТП и PC-Crash, представленные в таблице 3.13.

На основании результатов однофакторного дисперсионного анализа (таблица 3.14) процедура статистической значимости отличий между результатами программ не выявила существенных отличий. Поэтому обоснованным видится расчет скорости движения транспортного средства по длине следа торможения по формуле

$$v_a = 1,8 t_3 j + \sqrt{25,92 j s_T},$$

где  $t_3$  – время нарастания замедления (с);  $j$  – замедление ( $\text{м/с}^2$ );  $s_T$  – длина следов торможения (м).

Таблица 3.13 – Расчет скорости ТС по длине следа торможения

| Длина следа торможения | Программа экспресс-анализа ДТП | PC-Crash |
|------------------------|--------------------------------|----------|
| 10                     | 43,87                          | 40,41    |
| 11                     | 45,85                          | 42,33    |
| 12                     | 47,74                          | 44,26    |
| 13                     | 49,55                          | 46,08    |
| 14                     | 51,29                          | 47,77    |
| 15                     | 52,97                          | 49,47    |
| 16                     | 54,6                           | 51,07    |
| 17                     | 56,17                          | 52,65    |
| 18                     | 57,7                           | 54,22    |
| 19                     | 59,19                          | 55,71    |
| 20                     | 60,64                          | 57,19    |
| 23                     | 64,78                          | 61,27    |
| 25                     | 67,39                          | 63,88    |
| 28                     | 71,12                          | 67,22    |
| 30                     | 73,5                           | 70       |
| 33                     | 76,92                          | 73,41    |
| 35                     | 79,12                          | 75,56    |
| 38                     | 82,3                           | 78,74    |
| 40                     | 84,35                          | 80,78    |

Таблица 3.14 – Результаты статистического анализа в программе *Excel* для значимости отличий между результатами программ экспресс-анализа ДТП и PC-Crash

| Источник вариации | SS     | MS    | <i>p</i> | $F_{\text{крит}}$ |
|-------------------|--------|-------|----------|-------------------|
| Между группами    | 118,2  | 118,2 | 0,725812 | 0,4               |
| Внутри групп      | 5864,5 | 162,9 |          |                   |
| Итого             | 5982,8 |       |          |                   |

Подобным образом может быть проверена значимость влияния погодных условий, состояния дорожного полотна и квалификации водителя на тяжесть ДТП, экономический ущерб и пр.

**Многофакторный дисперсионный анализ.** Многофакторный дисперсионный комплекс – это совокупность исходных наблюдений, позволяющих статистически оценить действие и взаимодействие нескольких изучаемых факторов на изменчивость результативного признака. Эффект взаимодействия составляет ту часть общего варьирования, которая вызвана различным действием одного фактора при разных градациях другого. Специфическое действие сочетаний в эксперименте выявляется тогда, когда при одной градации первого фактора второй действует слабо или угнетающе, а при другой градации он проявляется сильно и стимулирует развитие результативного признака. Например, исследуя вероятность ДТП на определенном

участке дороги, необходимо учитывать состояние дорожного покрытия, время года, время суток (день или ночь), наличие гололеда, видимость в направлении движения, состояние водителя, техническое состояние всех систем транспортного средства, водительские навыки (стаж), действия других водителей и многие другие влияющие факторы.

Рассмотрим подготовку к проведению дисперсионного анализа с точки зрения обеспечения необходимых требований его математического аппарата.

**Независимость** исследуемых факторов является важнейшим условием дисперсионного анализа, пренебрегать которым нельзя из-за опасности получить бессмысленные или неверные выводы. В случае априорной неопределенности в этом плане необходимо провести *корреляционный анализ* на базе отдельного **специально** поставленного эксперимента. Тогда можно будет опираться хотя бы на некоррелированность факторов (для коррелированных факторов проводить дисперсионный анализ бессмысленно).

Если исследуемые факторы оказались зависимыми или коррелированными, то необходимо попытаться подобрать другие факторы или выбрать только независимые. Большую помощь в этом могут оказать *метод главных компонент и факторный анализ*.

**Однородность дисперсий** в слоях при различных значениях исследуемых факторов можно проверить по критерию Фишера.

Таким образом, рекомендуется следующая последовательность действий при дисперсионном анализе по выборочным результатам:

1. Проверка независимости (или некоррелированности) исследуемых факторов методами корреляционного анализа. При необходимости обеспечение некоррелированности с помощью замены факторов.

2. Проверка нормального распределения исследуемых факторов по критерию согласия Пирсона. При необходимости замена факторов.

3. Проверка однородности дисперсий по критерию Фишера. При необходимости замена факторов.

4. Разбиение общей дисперсии на составляющие в соответствии с задачей исследований.

5. Вычисление необходимых межгрупповых и остаточных дисперсий и проверка гипотез о значимости их различия с помощью критерия Фишера.

### 3.3.5 Статистическая проверка адекватности компьютерного моделирования

В § 2.1 разработан общий подход к оценке адекватности математических моделей механических систем и процессов. Для проверки адекватности математической модели реальному поведению оригинала рассогласование соответствующих параметров должно удовлетворять двум критериям: **точности** и **непротиворечивости**. Таким образом, необходим алгоритм проверки этих двух критериев для величины *рассогласования* результатов *контрольного вычислительного эксперимента* с результатами натурного экспе-

римента в тех же условиях:  $\Delta u = u_{\text{модели}} - u_{\text{оригинала}}$ . Эта величина на практике принимает дискретные значения, так как данные об оригинале регистрируются аппаратурой в конечном числе точек замера. Задачей контрольного вычислительного эксперимента в этом случае является получение данных о тех же параметрах в тех же узловых точках. В результате для статистического анализа предлагается множество значений рассогласования  $\{\Delta u_i; i = 1, 2, \dots, N\}$  – выборка из генеральной совокупности истинной величины рассогласования.

Как известно, даже на бытовом уровне, для повышения **точности** измерений проводят не одно измерение, а несколько. Это делается не из-за того, что какое-то из них может оказаться ошибочным, а из-за замечательного свойства *дисперсии* средней арифметической величины измерений: уменьшаться с ростом числа повторений опытов:

$$D_N = \frac{D}{N} \quad \text{или} \quad \sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

где  $D$  и  $\sigma$  – дисперсия и среднее квадратическое отклонение в одном опыте (измерении);  $D_N$  и  $\sigma_N$  – дисперсия и среднее квадратическое отклонение результата осреднения замеров по  $N$  опытам. Поэтому с помощью большего числа опытов достигают меньшего рассеивания (среднего квадратического отклонения) данных, т. е. большей точности.

Однако одной величины *среднего квадратического отклонения* для оценки точности результатов недостаточно. Такая оценка страдает неполнотой, так как не учитывает, насколько часто встречаются большие и малые, положительные и отрицательные рассогласования.

Итак, точность следует определять единой оценкой всего множества наблюдаемых значений случайной величины рассогласования результатов вычислительного эксперимента и "истинного" значения наблюдаемой величины. По своему смыслу в качестве такой "истинной" единой оценки должно выступать *математическое ожидание* рассогласования, которое обозначим  $a$ . Но об этом "истинном" значении рассогласования мы ничего не можем знать достоверно, остается о нем судить лишь с определенной вероятностью по ограниченному числу опытов. Поэтому наиболее полную оценку точности (вернее, погрешности) вычислительного эксперимента дает *доверительный интервал* для математического ожидания рассогласования. Так, например, может звучать вывод о точности в этом случае: с доверительной вероятностью 0,98 гарантируется погрешность коэффициента сцепления не более  $0,3^\circ$ . Критерием оценки точности тогда является соблюдение условий, приемлемых с точки зрения целей исследования.

Единственным практическим **недостатком** такой оценки может быть



лишь необходимость знать закон распределения исследуемого рассогласования. Однако, во-первых, для оценки погрешности по подавляющему большинству параметров технических систем можно считать такое распределение нормальным, хотя бы приблизительно в некоторой области, а во-вторых, можно практиковать построение несимметричных доверительных интервалов, отражающих разную степень строгости требований по точности. Доверительный интервал для оценки истинного значения рассогласования  $a$  по найденному значению выборочной средней величины рассогласования  $\Delta u$  при неизвестном значении  $\sigma$ , но известной несмещенной выборочной оценке среднего квадратического отклонения  $s$ :

$$\overline{\Delta u} - t_{\gamma, N-1} \frac{s}{\sqrt{N}} < a < \overline{\Delta u} + t_{\gamma, N-1} \frac{s}{\sqrt{N}},$$

где  $\overline{\Delta u} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^r N_j \Delta u_j$ ;  $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^r N_j (\Delta u_j - \overline{\Delta u})^2$ ;  $t_{\gamma, N-1}$  определяется по распределению Стьюдента;  $N_j$  – число попаданий в  $j$ -й интервал (из  $r$ ) наблюдаемых рассогласований  $\Delta u$ ;  $\Delta u_j$  – середина  $j$ -го интервала;  $N$  – общее число наблюдаемых значений  $\Delta u$ .

Размер доверительного интервала тем меньше, чем меньше доверительная вероятность  $\gamma$ , и чем больше число опытов  $N$ . Естественно, при планировании вычислительного эксперимента следует стремиться к тому, чтобы такая оценка погрешности (т. е. доверительный интервал) не выходила за границы требуемой с точки зрения целей исследования погрешности  $\pm \delta$ , чего можно добиться разумным увеличением числа опытов  $N$  и уменьшением доверительной вероятности  $\gamma$ . Иными словами, следует стремиться к тому, чтобы доверительный интервал целиком укладывался внутри допустимой погрешности (например, от  $-\delta$  до  $+\delta$ ).

Если такого условия не удастся выполнить на данной серии опытов, то следует или увеличить число опытов  $N$ , или уменьшить доверительную вероятность  $\gamma$ . Однако последнее значительно слабее влияет на результат, тем более, что значения доверительной вероятности  $\gamma < 0,7$  применять не желательно, так как это означает, что почти треть значений рассогласований может выходить за границы доверительного интервала (треть рассогласований принимает неконтролируемые значения).

Однако оценки точности с помощью доверительного интервала для математического ожидания рассогласования тоже недостаточно. Даже в том случае, когда рассеивание результатов мало и гарантируется с определенной доверительной вероятностью, может существовать *систематическая погрешность*. Ее присутствие свидетельствует о **закономерности** рассогласо-

вания между оригиналом и моделью и не позволяет пользоваться ею.

Оценка систематической ошибки делается по величине выборочного среднего рассогласований, так как эта точечная оценка по своему смыслу характеризует среднее значение рассогласований, "*присутствующее постоянно*". Указанную оценку можно получить с помощью критерия Стьюдента, построенного на  $t$ -распределении, в предположении идеального случая: истинное значение математического ожидания погрешности равно нулю  $a = 0$ . По указанному критерию сравниваются две величины:

$$t = \frac{\overline{\Delta u}}{s} \sqrt{N} \text{ и } t_{\text{крит}}(1-\alpha, N-1),$$

где  $t_{\text{крит}}(1-\alpha, N-1)$  – предельное значение критерия, определяемое по таблице распределения Стьюдента при уровне значимости  $\alpha$  (вероятности совершить ошибку первого рода: отвергнуть верную гипотезу об  $a = 0$ ) с  $N - 1$  степенями свободы.

Если  $|t| < t_{\text{крит}}$ , то систематическая ошибка **незначима**, т. е. не существенна и можно считать  $a = 0$ . В случае противоположного неравенства:  $|t| > t_{\text{крит}}$ , систематическая ошибка **значима**, т. е. не может считаться нулевой. В последнем случае математическая модель может считаться достаточно точной только при выполнении двух условий: доверительный интервал не выходит за границы требуемой с точки зрения целей исследования погрешности  $\pm \delta$ , а выборочное среднее погрешностей  $\Delta u$  пренебрежимо мало с точки зрения целей исследования, чтобы учитывать такую систематическую ошибку.

**Непротиворечивость** со статистической точки зрения может означать незначимость рассогласования, иными словами, неподверженность каким-либо закономерностям. Последний термин и служит основой для построения критерия оценки непротиворечивости с помощью критерия согласия Пирсона  $\chi^2$ . Для этого достаточно, чтобы рассогласование между моделью и оригиналом имело характер **простой ошибки измерений**, т. е. подчинялось нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием  $a = 0$ .

По критерию Пирсона  $\chi^2$  для этого сравниваются  $\hat{\chi}^2$  и  $\chi_{\alpha, \nu}^2$ . Если  $\hat{\chi}^2 < \chi_{\alpha, \nu}^2$ , то различие статистического и гипотетического (нормального) законов распределения **незначимо**. То есть при заданном уровне значимости  $\alpha$  гипотезу о поведении рассогласования эксперимента и "истины", как случайной ошибки измерений, можно принять и можно считать результаты вычислительного эксперимента не противоречащими реальному поведению оригинала. В случае противоположного неравенства:  $\hat{\chi}^2 > \chi_{\alpha, \nu}^2$  расхождение **значимо** (закономерно, не может считаться случайным) и гипотезу следует отвергнуть, т. е. результаты вычислительного эксперимента противоречат реальному поведению оригинала.

Только в том случае, когда выполнены условия и требуемой точности, и непротиворечивости, можно считать результаты вычислительного эксперимента адекватными реальному поведению оригинала с доверительной вероятностью  $\gamma$  и уровнем значимости  $\alpha$  в эксперименте из  $N$  опытов.

Таким образом, можно составить **алгоритм проверки адекватности** математической модели реальному поведению оригинала с помощью статистических критериев, предварительно задав допустимую погрешность  $\pm\delta$ , уровень значимости  $\alpha$  и доверительную вероятность  $\gamma$ , исходя из целей исследования. В этом алгоритме строго соблюдается последовательность проверки статистических критериев, каждый следующий из которых опирается на вывод предыдущего.

1. Выбирается один из параметров объекта, для которого есть результаты наблюдения  $\{u_{\text{оригинала } i}\}$  в  $N$  точках, и соответствующий параметр  $\{u_{\text{модели } i}\}$ , полученный в контрольном вычислительном эксперименте в тех же условиях в тех же точках.

2. Вычисляются разности  $\Delta u_i = u_{\text{модели } i} - u_{\text{оригинала } i}$ .

3. Вся область значений  $\Delta u$  разбивается на  $r$  интервалов таким образом, чтобы в каждом из них попало не менее пяти значений  $\Delta u_j$ .

4. Производится расчет количества попадания  $\Delta u_i$  в каждый  $j$ -й ( $1 \leq j \leq r$ ) интервал – частот  $N_j$ .

5. Определяются статистические оценки параметров распределения случайной величины  $\Delta u$ : выборочное среднее  $\overline{\Delta u} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^r N_j \Delta u_j$ , где  $\Delta u_j$  – се-

редина  $j$ -го интервала; и несмещенная оценка дисперсии  $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^r N_j (\Delta u_j - \overline{\Delta u})^2$ .

6. Для проверки **непротиворечивости**, т. е. подчиненности рассогласования нормальному закону распределения, применяется критерий согласия Пирсона  $\chi^2$ . Вычисленное значение  $\hat{\chi}^2$  сравнивается с табличным значением распределения Пирсона  $\chi_{\alpha, v}^2$ , где наиболее употребительные значения  $\alpha = 0,05$  или  $\alpha = 0,01$ . Если  $\hat{\chi}^2 < \chi_{\alpha, v}^2$ , то распределение  $\Delta u$  незначимо отличается от нормального, т. е. результаты вычислительного эксперимента можно считать не противоречащими реальному поведению оригинала. Если  $\hat{\chi}^2 > \chi_{\alpha, v}^2$ , то значимое отличие распределения  $\Delta u$  от нормального свидетельствует о противоречии результатов вычислительного эксперимента реальному поведению оригинала и исследования адекватности следует пре-

кратить.

Замечание. Критерий согласия Пирсона  $\chi^2$  не требует сведений о законах распределения, а все последующие пункты **требуют знания закона** распределения и **основаны** на том, что  $\Delta u$  распределено по нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием  $a = 0$  и средним квадратическим отклонением  $s$ .

7. Для оценки систематической ошибки проверяется гипотеза о равенстве нулю математического ожидания ( $a = 0$ ) рассогласования  $\Delta u$  с помощью критерия Фишера, для чего вычисляется статистика  $t = \frac{\overline{\Delta u}}{s} \sqrt{N}$ , которая сравнивается с  $t_{\text{крит}}(1-\alpha, N-1)$ , определяемым по таблице распределения Стьюдента при уровне значимости 0,05 или 0,01 и числе степеней свободы  $N - 1$ . Если  $|t| > t_{\text{крит}}$ , то дальнейшие исследования адекватности нужно прекратить, так как это означает существование недопустимой систематической погрешности между результатами вычислительного эксперимента и реальным поведением оригинала. Если  $|t| < t_{\text{крит}}$ , то систематическая погрешность отсутствует и можно продолжать исследования.

8. Для оценки **точности** математической модели строится доверительный интервал для математического ожидания рассогласования при заданной доверительной вероятности  $\gamma$  (обычно 0,8; 0,9; 0,99; или 0,999):

$$\overline{\Delta u} - t_{\gamma, N-1} \frac{s}{\sqrt{N}} < a < \overline{\Delta u} + t_{\gamma, N-1} \frac{s}{\sqrt{N}},$$

где  $t_{\gamma, N-1}$  определяется по таблице распределения Стьюдента. Если радиус доверительного интервала не превосходит допустимой погрешности

$$t_{\gamma, N-1} \frac{s}{\sqrt{N}} \leq \delta,$$

то математическую модель можно считать достаточно точной по отношению к оригиналу.

В дополнение к этому можно построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения рассогласования

$$s \sqrt{\frac{N-1}{\chi_{1-\frac{\gamma}{2}, N-2}^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{N-1}{\chi_{\frac{\gamma}{2}, N-2}^2}}.$$

9. Если по пункту 7 можно считать математическую модель не противоречащей оригиналу, а по пункту 8 достаточно точной, то результаты расчетов адекватны реальному поведению оригинала.

**Пример.** Рассмотрим проверку адекватности компьютерной программы PC-Crash на примере результатов расчета тормозного пути. Данные натурных испытаний проводились специализированной компанией, причем эксперимент проводился для холодных и перегретых шин. В программе существует возможность учета характеристик резины, параметров трансмиссии и тормозных систем для различных автомобилей, но не учитывается температура шин, поэтому в дальнейшем сравнение результатов моделирования проводится по двум выборкам – для холодных и перегретых шин. Частично результаты представлены на рисунке 3.20.

а)

| Автомобиль        | 100 км/ч:<br>холодные/<br>перегрев | 130 км/ч:<br>холодные/<br>перегрев | μ-Split:<br>тормозной<br>путь/<br>стабильность<br>торможения |
|-------------------|------------------------------------|------------------------------------|--|
| Audi Q7           | 37,1/39,4                          | 63,4/69,1                          | 99,9/удов.   |
| BMW 550i          | 36,7/37,1                          | 62,5/63,5                          | 98,1/хорошо  |
| Dacia Logan       | 41,4/42,1                          | 71,3/77,4                          | 109,9/плохо  |
| Mercedes Sprinter | 42,5/43,6                          | 70,9/75,2                          | 122,2/удов.  |
| Opel Astra        | 39,1/40,4                          | 67,3/75,4                          | 115,2/плохо  |
| Peugeot 207       | 38,3/40,5                          | 66,0/74,3                          | 124,0/плохо  |
| VW Caddy          | 41,1/44,5                          | 70,6/75,9                          | 112,7/хорошо   |

б)

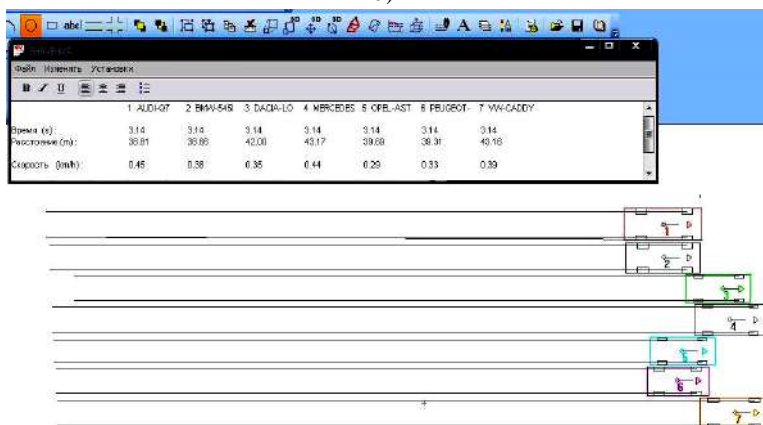


Рисунок 3.20 – Пример результатов испытаний (а) и компьютерного моделирования в PC-Crash (б) тормозного пути

Наибольшие расхождения результатов испытаний и моделирования тормозного пути по абсолютной величине соответствуют автомобилю VW Caddy (2,06 м, относительная погрешность 5 %), затем Mercedes Sprinter (1,96 м, относительная погрешность 5,3 %), наименьшие – Dacia Logan (0,1 м, относительная погрешность 0,24 %), причем программа моделирования PC-Crash не учитывает температуру шин, которая влияет на тормозной путь.

Используя данные испытаний тормозных путей автомобилей (рисунок 3.20), определим рассогласование результатов вычислительного и натурного экспериментов в тех же условиях:  $\Delta u = u_{\text{модели}} - U_{\text{оригинала}}$ .

Определим статистические оценки параметров распределения случайной величины  $\Delta u$ : выборочное среднее для холодных шин  $a_{х. ш} = 1,214$  м, для перегретых –  $a_{п. ш} = -0,364$  м и среднее квадратическое отклонение  $\sigma_{х. ш} = 0,676$  м,  $\sigma_{п. ш} = 0,84$  м.

Для проверки *непротиворечивости* выполним проверку распределения рассогласований нормальному закону распределения.

В нашем исследовании:  $\hat{\chi}^2 > \chi_{\alpha=0,05, v=4}^2 = 9,488$  для холодных и перегретых шин, значит, данный расчет отвергает проверяемую гипотезу о нормальном законе распределения рассогласования результатов вычислительного и натурального экспериментов при  $\alpha = 0,05$ . На этом этапе можно прекратить статистическую проверку адекватности либо продолжить накапливать результаты, либо изменить  $\alpha$ , если такая вероятность ошибки удовлетворит исследователя.

Для оценки систематической ошибки проверяется гипотеза о равенстве нулю математического ожидания ( $a = 0$ ) рассогласования  $\Delta u$ . В предположении, что исследуемая величина имеет нормальный закон распределения (в нашем случае эта гипотеза не подтверждается при  $\alpha = 0,05$ ), проверим гипотезу о равенстве математического ожидания числу  $a = 0$  при альтернативной гипотезе  $H_a$ :  $H_0: M[x] = 0$ ;  $H_a: M[x] \neq 0$ .

Так как точное значение среднеквадратического отклонения неизвестно и альтернативная гипотеза  $H_a: a \neq a_0$ , воспользуемся  $t$ -критерием с правосторонней критической областью. Вычислим значение  $t$ -критерия. В таблице квантилей распределения Стьюдента по уровню значимости  $\alpha = 0,05$  и числу степеней свободы  $v = n - 1 = 13$  находим  $t_{\alpha/2; n-1} = t_{0,025; 13} = 2,16$ . Так как  $|t| > t_{0,025; 13}$ , то имеющиеся данные дают основания для отклонения гипотезы о равенстве математических ожиданий для холодных и перегретых шин.

При этом следует отметить, что при правильных начальных данных и возможности их внесения в программу можно получить очень близкие результаты компьютерного моделирования.

### Контрольные вопросы

1 Опишите распределения случайных величин и формулы определения вероятностей их значений.

2 Назовите требования к точечным оценкам и объему выборок?

3 Укажите методы многомерного статистического анализа решения задач, связанные с изучением сложных многофакторных систем?

4 Перечислите последовательные шаги решения общей задачи регрессионного анализа.

5 Составьте алгоритм проверки адекватности.

## 4 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

### 4.1 Статистические методы планирования эксперимента

#### 4.1.1 Проблемы построения эксперимента

Планирование эксперимента появилось в агробиологии и связано с именем английского статистика и биолога сэра Рональда Эйлмера Фишера, упоминавшегося в разделе дисперсионного анализа. В начале XX века на агробиологической станции в Ротамстеде (Великобритания) начались исследования влияния удобрений на урожайность различных сортов зерновых. Ученые вынуждены были считаться как с большой изменчивостью объектов исследования, так и с большой продолжительностью опытов (около года). В этих условиях не было иного пути, кроме разработки продуманного плана эксперимента для уменьшения негативного влияния указанных факторов на точность выводов. Применяв статистические знания к биологическим проблемам, Фишер пришел к разработке собственных принципов теории статистического вывода и положил начало новой науке о планировании и анализе экспериментов.

Исследование сложных технических систем (например, аэродинамика и системы безопасности автомобилей) требует постановки и проведения сложных и дорогостоящих экспериментов (например, краш-тестов) и учета влияния множества параметров. Для этого необходимо *планирование эксперимента* – совокупность действий, объединенных целью исследования и направленных на разработку стратегии экспериментирования от начальных до заключительных этапов изучения объекта исследований (от получения априорной информации до создания работоспособной математической модели или определения оптимальных условий) [2, 22].

С другой стороны, между объектом исследования и результатами эксперимента, полученными и обработанными в целях этого исследования, существует огромная дистанция. Дело не только в том, что эксперимент может быть поставлен разным образом, а его результаты обработаны различными методами. Дело еще в том, что объект исследования – оригинал – многообразен и бесконечно сложен в своих проявлениях, только часть из которых мы можем наблюдать в эксперименте – модели. То есть необходимо четко себе представлять, что результаты эксперимента – это лишь более или менее представительная выборка при наблюдении за генеральной совокупностью. А это требует использования методов математической статистики для проведения успешного анализа результатов эксперимента. Особую роль здесь играют *модели дисперсионного и регрессионного анализа*.

Ситуация еще более усложняется, если исследуется не единичный объект, а сложная система. В этом случае наибольшим затруднением становится множественность целей подсистем и элементов, а также множествен-

ность критериев оценки их работы (многокритериальность). Различные критерии могут вступать в противоречие друг с другом, однако даже их частичное игнорирование может полностью исказить систему как целое.

Например, если для транспортного маршрутного предприятия приоритет – наполняемость салона, то для пассажиров – удобство и безопасность поездки.

Возникает необходимость разработки такой постановки эксперимента, которая обеспечила бы выполнение сразу нескольких условий: практическую осуществимость (быстрота, экономичность), достаточную полноту (для обоснования выводов), наглядность (удобство интерпретации).

В теории *планирования эксперимента* сформировалась система основных терминов и понятий. Прежде всего имеется в виду, что изучаемая система может быть представлена "черным ящиком". Кроме того, вводятся следующие определения.

*Эксперимент* – это система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях [2, 22].

*Опыт* – это отдельная часть эксперимента, воспроизводящая исследуемое явление в определенных задаваемых условиях при возможности регистрации его результатов.

*Пассивный эксперимент* – эксперимент в отсутствии управляемых факторов: выходные факторы зависят только от неуправляемых входных и неконтролируемых факторов.

*Активный эксперимент* – эксперимент в отсутствии неуправляемых входных факторов: выходные факторы зависят только от управляемых входных и неконтролируемых факторов.

Теория планирования эксперимента занимается именно активным экспериментом и предполагает планирование значений управляемых входных факторов  $X$  в области их возможных значений. Таким образом, планом эксперимента является некоторая совокупность уровней факторов  $X$ , построенная для определенных целей исследования. Обычно он изображается в виде матрицы плана, в которой строки отвечают опытам, а столбцы – факторам, т. е. элемент  $x_{ij}$  матрицы плана обозначает определенный уровень  $j$ -го фактора в  $i$ -м опыте:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nk} \end{bmatrix}.$$

Для наиболее экономичного получения достоверного результата, удовлетворяющего заданным требованиям, необходимо решить ряд проблем постановки эксперимента:



- 1) собственно эксперимент:
  - а) формулировка целей и задач эксперимента;
  - б) выбор наблюдаемого выходного фактора;
  - в) выбор управляемых факторов;
  - г) выбор уровней этих факторов (количественных или качественных, фиксированных или случайных);
  - д) подбор сочетаний уровней факторов;
- 2) планирование эксперимента:
  - а) определение необходимого числа опытов;
  - б) определение порядка проведения отдельных опытов;
  - в) выбор метода рандомизации;
  - г) составление математической модели для описания результатов;
- 3) анализ результатов эксперимента:
  - а) сбор и обработка данных;
  - б) вычисление статистик (выборочных функций) для проверки гипотез;
  - в) интерпретация результатов эксперимента.

Для успешного решения первой из этих проблем применяются методы **теории моделирования**, третьей – методы **обработки информации**. Методам решения второй проблемы и частично первой посвящена теория **планирования эксперимента**.

Основные *принципы планирования эксперимента* позволяют сделать эксперимент практически реализуемым и информативным.

1. **Принцип отказа от полного перебора возможных входных состояний**. Для получения исчерпывающей информации о поведении выходных факторов  $Y$ , вообще говоря, необходимо проведение такого числа опытов в эксперименте, чтобы все уровни каждого из входных факторов встречались друг с другом во всех возможных комбинациях. Понятно, что с ростом числа факторов и уровней объем такого эксперимента быстро увеличивается, а для непрерывно изменяющегося хотя бы одного фактора становится бесконечным. Поэтому от полного перебора отказываются сознательно, строго отбирая лишь *существенные факторы* и вводя дискретную сетку уровней непрерывных факторов, исходя из необходимого вида математической модели.

2. **Принцип последовательного усложнения математической модели** (принцип последовательного планирования). При постановке сложного эксперимента бывает весьма полезно пользоваться приемами последовательного анализа, следуя Е.С. Вентцель: "Основной принцип теории планирования эксперимента состоит в том, что любое принятое заранее решение должно пересматриваться с учетом полученной новой информации".

3. **Принцип сопоставления с шумом**. Точность регрессионной модели должна сопоставляться с интенсивностью случайного неконтролируемого воздействия. Действительно: бессмысленно ставить дорогостоящий экспе-

римент для получения точной модели, если результаты эксперимента сами по себе обладают большой итоговой погрешностью. Конечно, повторные опыты могут существенно увеличить точность эксперимента, но здесь имеется в виду именно итоговая погрешность всего эксперимента с учетом повторения опытов.

4. **Принцип рандомизации** (принцип приведения к случайности влияния факторов). *Рандомизация* – это обеспечение случайности влияния действующих на систему факторов, не поддающихся или поддающихся с трудом учету и контролю. В рандомизированной системе влияние действующих факторов можно считать вполне случайным, что позволяет учитывать их статистически. Примитивнейший прием рандомизации плана эксперимента состоит в случайном переборе уровней факторов. Понятие рандомизации ввел Фишер, заметивший, что разделение общей дисперсии на частные, соответствующие исследуемым факторам, тем эффективнее, чем случайнее вклад каждого фактора. Этот же вывод можно отнести и к неучтенным на первых порах факторам, что подталкивает к учету как можно большего числа факторов. Иными словами, рандомизация – это искусственный перевод неслучайных факторов, которые невозможно учесть в эксперименте, в разряд случайных, что позволяет избавиться от систематических погрешностей, связанных с этими факторами.

5. **Принцип оптимальности плана** (наличие критерия оптимальности). Цели исследований можно достичь только в таком эксперименте, который практически осуществим, достаточно информативен и нагляден. Все это требует применения оптимизации, т. е. формулировки критерия оптимальности. При выработке критерия оптимальности плана эксперимента безусловно следует учесть и минимизацию объема и стоимости эксперимента, и максимизацию объема и эффективности (в статистическом смысле) получаемой информации. К последним в современном планировании эксперимента принято относить критерии оптимальности планов для регрессионного анализа. Вообще говоря, даже для одной и той же задачи могут быть сформулированы несколько критериев оптимальности. Из нескольких десятков таких критериев отметим наиболее распространенные [2], связанные с точностью оценивания коэффициентов регрессии:

- критерий *D*-оптимальности обеспечивает минимизацию обобщенной дисперсии оценок коэффициентов регрессионной модели (минимизацию объема эллипсоида рассеяния);

- критерий *A*-оптимальности обеспечивает минимизацию суммы дисперсий оценок коэффициентов регрессионной модели;

- критерий *E*-оптимальности обеспечивает минимизацию наибольшей оси эллипсоида рассеяния.

#### 4.1.2 Назначение плана эксперимента

Целью планирования эксперимента было сформулировано получение максимума достоверной информации при минимуме затрат. Под затратами здесь могут пониматься не только материальные затраты непосредственно на эксперимент, но и затраты времени и ресурсов.

При планировании эксперимента следует иметь в виду, что информация должна быть получена *достоверной* и сформулированной наиболее компактно. Эти условия можно выполнить только с помощью дисперсионного и регрессионного анализа, т. е. с помощью подбора дисперсионных и регрессионных математических моделей, наилучшим образом соответствующих результатам эксперимента. То есть необходимо получение таких оценок параметров моделей, статистически определенных по результатам эксперимента, которые обладают свойствами *эффективности, состоятельности и несмещенности*.

Эффективность статистической оценки, как известно, тем выше, чем меньше ее дисперсия. А поскольку дисперсия оценки любого параметра зависит от множества факторов: условий постановки эксперимента, его погрешности и, как видно из нижеприведенных примеров, от его плана, то очевидна возможность управления общей дисперсией через дисперсии от влияния этих отдельных факторов.

Перечисленные требования к эксперименту, конкретизированные в терминах математической статистики, позволяют осознанно выбирать наиболее удачный план с точки зрения применения тех или иных методов статистического анализа.

**Пример.** В том случае, когда весы имеют погрешность, наиболее естественный и традиционный способ взвешивания трех предметов *A, B, C* заключается в предварительном "холостом взвешивании" пустой чашки весов и последующем взвешивании отдельных предметов.

План такого эксперимента показан в таблице 4.1. Здесь матрицей плана является матрица из +1 и -1, представляющих два уровня каждого фактора:  $x_{ij} = \pm 1$  и  $x_{ij} = -\pm 1$  (для каждого предмета это означает присутствие или отсутствие его на чашке весов).

Таблица 4.1 – Пример плана эксперимента

| № опыта | A  | B  | C  | Результат |
|---------|----|----|----|-----------|
| 0       | -1 | -1 | -1 | $y_0$     |
| 1       | +1 | -1 | -1 | $y_1$     |
| 2       | -1 | +1 | -1 | $y_2$     |
| 3       | -1 | -1 | +1 | $y_3$     |

В итоге вес *A* определится как  $y_1 - y_0$ , а дисперсия этого результата формулой

$$\sigma^2 \{A\} = \sigma^2 \{y_1 - y_0\} = 2\sigma^2 \{y\},$$

где  $\sigma \{y\}$  – погрешность однократного взвешивания.

Этот же эксперимент можно провести по плану, в котором "холостое взвешивание" заменено взвешиванием всех трех предметов вместе (таблица 4.2). В этом случае вес  $A$  определится выражением:  $\frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)$ , а дисперсия  $\sigma^2\{A\} = \sigma^2\left\{\frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)\right\} = \sigma^2\{y\}$ , окажется вдвое меньше, т. е. результат **вдвое точнее!**

**Таблица 4.2 – Пример плана эксперимента**

| № опыта | $A$ | $B$ | $C$ | Результат |
|---------|-----|-----|-----|-----------|
| 0       | +1  | +1  | +1  | $y_4$     |
| 1       | +1  | -1  | -1  | $y_1$     |
| 2       | -1  | +1  | -1  | $y_2$     |
| 3       | -1  | -1  | +1  | $y_3$     |

Такой эффект достигнут за счет того, что итоговый вес теперь получается в результате четырех взвешиваний, а не двух. Иными словами, для того, чтобы определить вес каждого предмета по первому плану требуется произвести только два опыта: замер с пустой чашей весов и с этим предметом, зато по второму плану все четыре опыта участвуют в определении веса каждого предмета. Таким образом, число степеней свободы выросло с 2 до 4. В этом смысле первый план фактически распадается на три отдельных плана однофакторных двухуровневых экспериментов, а второй оказывается планом трехфакторного двухуровневого эксперимента.

При изучении систем с большим количеством факторов приходится иметь дело с понятием полноты плана, отражающим перебор всех уровней исследуемых факторов. Поэтому введем это понятие. *Полным факторным экспериментом* называется такой эксперимент, план которого обеспечивает полный перебор всевозможных сочетаний всех уровней и всех факторов. План полного факторного эксперимента называют *полным планом*. Объем полного плана (т. е. количество необходимых опытов) легко подсчитать:

$$h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_k = \prod_{j=1}^k h_j,$$

где  $k$  – число факторов, а  $h_j$  – число уровней каждого  $j$ -го фактора. Так, например, планы в таблицах 4.1 и 4.2 неполные.

Если уровни исследуемых факторов распределены в планах симметрично, т. е. все встречаются одинаковое число раз, то такие планы называются сбалансированными. Симметрия эта не геометрическая, а "смысловая": если в одном опыте встречается один уровень данного фактора, то в каком-то другом опыте должен встретиться и другой. Например, если есть опыт  $ABC$ , то должны быть опыты и  $BCA$ , и  $CAB$ , что обеспечит симметрию опытов по использованию уровней  $A, B, C$  факторов.

### 4.1.3 Планирование объема эксперимента

Допустим, что эксперимент имеет целью определение с контролируемой погрешностью значения единственного параметра  $x$  наблюдаемого явления.

Изложим по порядку усложнения различные методы определения объема плана такого эксперимента.

1. Простейший подход к планированию объема эксперимента выражается известной поговоркой: "Семь раз отмерь, один – отрежь!". Математическое обоснование этой житейской мудрости ясно из следующего.

Поскольку погрешность связана с рассеиванием параметра, т. е. с отклонением этой случайной величины от своего математического ожидания, то простейший подход к оценке погрешности можно свести к точечной оценке рассеивания. На языке математической статистики это выражается известным соотношением:

$$\sigma\{\bar{x}\} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

где  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение контролируемого параметра  $x$  в одиночном опыте (измерении);  $\bar{x}$  – его среднее выборочное значение по  $N$  одинаковым опытам;  $\sigma\{\bar{x}\}$  – среднее квадратическое отклонение среднего выборочного.

Итак, если априори известно (например, в виде паспортных данных измерительной техники) значение  $\sigma$  контролируемого параметра при одиночном опыте, то вышеприведенная формула позволяет определить необходимое число опытов для обеспечения требуемой погрешности  $\delta$ :

$$N = \frac{\sigma^2}{\delta^2},$$

при этом не существенен закон распределения  $x$ .

2. Точечные оценки контролируемого параметра обладают всеми необходимыми свойствами несмещенности, состоятельности, эффективности и достаточности только при больших объемах эксперимента. Кроме того, определение объема эксперимента по дисперсии не дает вероятностной оценки обеспечения заданной погрешности. А такая оценка необходима, поскольку результаты любого эксперимента следует рассматривать как выборку из генеральной совокупности проявления исследуемого процесса. Поэтому более качественную оценку требуемого объема эксперимента следует проводить с помощью доверительных интервалов. Однако для их построения необходимо знать закон распределения этого параметра; в отличие от предыдущих методов – это и есть "плата" за качество оценки.

Поскольку контролируемый параметр чаще всего оценивают с помощью выборочного среднего, то для оценки его точности можно использовать доверительный интервал для математического ожидания этого контролируемого параметра. Этот интервал обычно строится симметрично относительно выборочного среднего, и его радиус непосредственно опре-

деляет точность оценки (вернее, погрешность) при заданной "уверенности" – доверительной вероятности  $\gamma$ . Так, например, для **нормально** распределенного параметра погрешность его средней выборочной оценки (радиус доверительного интервала, половина его) определяется одной из формул:

$$\delta = u_{0,5\gamma} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \text{ или } \delta = t_{\gamma} \frac{s}{\sqrt{N}},$$

(первой – при априори известном значении  $\sigma$ , второй – при неизвестном  $\sigma$ , но найденной выборочной несмещенной его оценке –  $s$ ), где  $u_{0,5\gamma}$  – аргумент стандартизованной функции нормального закона распределения;  $\gamma$  – назначенная доверительная вероятность;  $t_{\gamma}$  – из таблицы распределения Стьюдента с  $N - 1$  степенями свободы при вероятности  $p = 1 - \gamma$ . Отсюда вытекают формулы для определения объема эксперимента, необходимого для обеспечения погрешности  $\delta$  с доверительной вероятностью  $\gamma$ :

$$N = u_{0,5\gamma}^2 \frac{\sigma^2}{\delta^2} \text{ или } N = \frac{t_{\gamma}^2 s^2}{\delta^2}.$$

В общем случае контролируемой величины, распределенной по другому закону (не нормальному), следует исходить из общего определения доверительного интервала и строить его на основании именно этого закона распределения. Можно также пользоваться приближенными законами распределения.

В таблице 4.3 приведены формулы для определения объема эксперимента, необходимого для проверки соответствующих конкурирующих гипотез ( $\alpha$  – вероятность ошибки I рода (отвергнуть верную гипотезу);  $\beta$  – вероятность ошибки II рода (принять неверную гипотезу)).

Таблица 4.3 – Формулы для определения объема эксперимента

| Конкурирующая гипотеза | Требуемый объем эксперимента   |  |
|------------------------|--|--|
|                        | при известном $\sigma$   | при неизвестном $\sigma$                                     |
| $a \neq a_0$           | $u_{\frac{1-\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{(\bar{x} - a_0)^2}$                                      | $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{s^2}{(\bar{x} - a_0)^2}$     |
| $a > a_0$              | $u_{\frac{1-\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{(\bar{x} - a_0)^2}$                                      | $t_{1-\alpha}^2 \frac{s^2}{(\bar{x} - a_0)^2}$               |
| $a < a_0$              | $u_{\frac{1-\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{(\bar{x} - a_0)^2}$                                      | $t_{\alpha}^2 \frac{s^2}{(\bar{x} - a_0)^2}$                 |
| $a = a_1$              | $\left( u_{\frac{1-\beta}{2}}^2 + u_{\frac{1-\alpha}{2}}^2 \right) \frac{\sigma^2}{(a_1 - a_0)^2}$ | $(t_{1-\alpha}^2 + t_{1-\beta}^2) \frac{s^2}{(a_1 - a_0)^2}$ |

## 4.2 Особые методы планирования эксперимента

### 4.2.1 Специальные приемы планирования эксперимента

Классическая теория планирования эксперимента представляет собой набор приемов составления матрицы дискретного эксперимента с конечным числом уровней факторов. В этом смысле планирование эксперимента с непрерывными значениями факторов принципиально невозможно и приходится искусственно вводить **дискретные** уровни. Если рассматриваемые факторы имеют вид простых измеримых параметров, то проблема состоит лишь в том, чтобы выбрать наименьшее число наиболее представительных значений в качестве уровней. Куда более сложным представляется случай неизмеримых, качественных факторов. Для их дискретизации необходимы неформальные процедуры, основанные на глубоком знании особенностей объекта. Приходится применять методы *ранжирования* и *экспертных оценок*.

1. Для многофакторных экспериментов большое число уровней может стать непреодолимым препятствием не только при планировании, но и при постановке отбора и обработке данных. Само по себе большое число факторов увеличивает лишь размерность задачи и усложняет ее трактовку. Хуже обстоит дело при многоуровневыми факторами – план и эксперимент в этом случае теряют наглядность. Поэтому на практике стараются, прежде всего, уменьшить именно число уровней. Конечно, это не является самоцелью.

Объем эксперимента определяется  $k$  произведением:  $\prod_{j=1}^k h_j$ , где  $k$  – число

факторов;  $h_j$  – число уровней каждого фактора.

2. Еще одной серьезной проблемой при планировании эксперимента является выполнение требований дисперсионного анализа, особенно в части **независимости** исследуемых факторов. На практике изучение сложных объектов обычно происходит в режиме пассивного наблюдения. При этом выбор изучаемых факторов часто бывает ограничен только теми, которые легко регистрировать. В этих условиях априори гарантировать независимость наблюдаемых параметров **невозможно**. Решению этой проблемы помогает *метод главных компонент*, который позволяет выбрать исследуемые факторы на основе их **некоррелированности**. Поскольку для дисперсионного анализа непосредственное значение имеет именно отсутствие корреляции между исследуемыми параметрами, то последний факт можно использовать вместо громоздких и неформальных исследований их независимости. В конечном итоге можно даже удовлетвориться ненулевой, но относительно **слабой корреляцией**, оценку которой следует делать для каждой конкретной задачи отдельно.

Основная идея метода главных компонент состоит в замене переменных, характеризующих исследуемые факторы. Пусть исходная система из  $k$

наблюдаемых входных факторов  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) построена по итогам  $N$  наблюдений и представляется матрицей результатов эксперимента:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{NK} \end{bmatrix},$$

в которой столбцами являются наблюдаемые значения входных факторов. По этим данным можно рассчитать корреляционную матрицу  $R = (r_{ij})$ , составленную из выборочных оценок *коэффициентов корреляции*:

$$r_{ij} = \frac{1}{s_i s_j} \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_{ni} - \bar{x}_i)(x_{nj} - \bar{x}_j),$$

где  $s_i$  – выборочная оценка среднего квадратического отклонения  $i$ -го фактора. Заметим, что диагональные элементы матрицы  $R$  равны единице, а сама матрица – симметричная:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Замена переменных  $z_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j$  подбирается таким образом, чтобы но-

вые переменные  $z_i$  были не коррелированы. Для этого достаточно, чтобы матрица ковариаций новых переменных стала диагональной. Для того, чтобы выбор шкал измерения факторов не привносил в расчеты своих масштабов, следует максимально унифицировать системы отсчета и нормировать переменные.

Математический метод решения такой задачи известен и реализуется с помощью стандартного программного обеспечения. Из уравнения  $\det(R - \nu E) = 0$ , где  $E$  – единичная матрица, находятся собственные значения матрицы  $R$ :  $\nu = s^2(z_i)$ , которые позволяют вычислить собственные векторы  $a_i$  той же матрицы. В свою очередь собственные векторы определяют матрицу искомого преобразования, как матрицу, составленную из векторов  $a_i$ .

3. При планировании эксперимента немаловажное значение имеет удачный выбор факторов, который позволил бы уменьшить его объем. Задачу выбора наименьшего числа наиболее представительных (т. е., как мы теперь знаем, независимых – некоррелированных) факторов помогает *решить факторный анализ*.



На практике, как правило, просто подбирают наиболее приемлемый набор "высших" факторов. Конечно, выбор здесь неоднозначен, поэтому пытаются отыскать наиболее легко интерпретируемые, комплексные факторы. Собственно *факторным анализом* и является такой поиск.

4. Существует еще один способ выявления наиболее значимых факторов изучаемого процесса – *планирование отсеивающих экспериментов*, состоящее в постепенном отсеивании несущественных факторов из первоначально выбранного большого их числа. Наиболее распространенным методом для этого является *метод случайного баланса*. Задача отсеивающего эксперимента состоит в том, чтобы провести ранжирование всех факторов.

#### 4.2.2 Методы экспертных оценок

*Методы экспертных оценок* занимают в планировании эксперимента особое место благодаря тому, что их можно применять на любой стадии исследовательской работы и в самых разнообразных целях, в том числе при анализе и совершенствовании программ анализа и реконструкции ДТП. Здесь следует упомянуть лишь самые распространенные вопросы, которые решаются с их помощью:

- формулировка постановки задачи исследований;
- выбор основных факторов;
- выбор наблюдаемых и регистрируемых параметров;
- структурирование сложных систем;
- ранжирование критериев и целей деятельности отдельных элементов сложных систем и т.д.

Группы экспертов (от 1 до 30 специалистов) создаются с учетом их квалификации по специально разработанным методикам.

Основным требованием всех методов экспертных оценок является строгая формулировка вопросов экспертизы, содержащих единообразно понимаемые и единичные (не распространенные или комплексные) темы.

Ниже, без дополнительных рассуждений, приводится краткий обзор основных аспектов теории экспертных оценок.

##### **Этапы экспертизы:**

- формирование множества оцениваемых объектов (вопросов);
- формирование экспертной комиссии;
- выбор процедуры экспертного оценивания (выбор метода);
- обработка результатов экспертного оценивания;
- анализ результатов экспертизы и принятие решения.

##### **Классификация методов экспертизы:**

- по количеству экспертов: индивидуальные, коллективные (следует учитывать, что при количестве экспертов менее 7 информация страдает неполнотой, а стабилизируются результаты экспертизы при 10 – 30 экспертах);
- по методу опроса (возможны сочетания методов): индивидуальный,

очный (интервью) с обратной связью или без нее, открытый (ответ в произвольной форме), закрытый (ответ типа да/нет или выбор ответа из предложенного набора), прямой (до экспертов доводится цель экспертизы), косвенный (до экспертов не доводится цель экспертизы);

– по информированности экспертов: с заданным множеством объектов оценивания, с неопределенным множеством объектов оценивания;

– по организации процедуры: простые, сложные (с декомпозицией проблемы на простые вопросы).

### **Методы проведения экспертизы.**

*Метод мозговой атаки* (метод мозгового штурма) – коллективный открытый метод, при котором на поставленную цель экспертизы эксперты отвечают генерацией произвольных идей: без критики, без аргументации, может быть с развитием или с фантазией. Далее идеи, не соответствующие цели, отсеиваются; систематизируются; рассматриваются прямо противоположные; оценивается возможность реализации. В заключение, после отбора руководителями экспертизы нескольких идей, они могут подвергаться всей группой экспертов конструктивной критике по *конкретным* позициям: логичность, этичность, эстетичность, экологичность, социальность и т. п.

*Метод дискуссии* – коллективный открытый метод, при котором во время демократичного обсуждения заданной тематики происходит генерация идей, их формулировка и обобщение.

*Метод комиссий* – коллективный открытый метод, при котором предусматривается предварительный отбор состава экспертов и разбиение их на комиссии по направлениям, предоставление всей требуемой информации и в заключение коллегиальная оценка по принятой шкале.

*Метод суда* – метод, близкий к методу комиссий, но состав отбирается не административным образом, а с обеспечением противоположных мнений и интересов, и информация предполагается субъективной.

*Метод деловых совещаний* – коллективный открытый метод, при котором ведущий формулирует проблему, участники высказывают дополнительную информацию, альтернативы, идеи и оценки, а окончательный выбор решения или оценки делает и оглашает ведущий.

*Анкетирование и интервьюирование* – метод, который может быть любым по количеству экспертов и по методу опроса, предъявляет особые требования к лаконичности и однозначности вопросов и ответов, проводится в письменной или устной форме чаще всего независимым опросом экспертов.

*Метод Дельфи* – анонимное анкетирование в несколько этапов (2 – 3) с обратной связью, когда всем экспертам сообщаются результаты обработки (но не частные мнения) ответов предыдущего этапа с аргументацией крайних суждений.

*Метод решающих матриц* – предполагает декомпозицию сложной проблемы на несколько уровней, в которых возможны альтернативные решения, связанные с решениями на соседних уровнях; эксперты строят в конечном итоге матрицу оценок, сумма которых равна 1.

Перечисленные методы могут комбинироваться друг с другом.

**Обработка результатов экспертизы** может быть проведена по следующей схеме, отдельные элементы которой могут не использоваться.

1. *Показатели обобщенного мнения*

1.1) средняя балльная оценка  $M_j = \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{m_j} C_{ij}$ , где  $m_j$  – число экспертов

оценивших  $j$ -й вопрос;  $C_{ij}$  – оценка по балльной шкале  $0 \leq C \leq B$  (где  $B$  наивысшая балльная оценка в принятой шкале), данная  $i$ -м экспертом  $j$ -му вопросу ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ );

1.2) частота  $k$ -й оценки  $j$ -го опроса  $K_j^k = \frac{m_j^k}{m_j}$ ;

1.3) сумма рангов  $j$ -го вопроса  $S_j = \sum_{i=1}^{m_j} R_{ij}$ , где  $R_{ij}$  – ранг.

2. *Показатели степени согласованности экспертов*

2.1) коэффициент вариации мнений по  $j$ -му вопросу  $V_j = \frac{\sigma_j}{M_j}$ , где

$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{m_j - 1} \sum_{i=1}^{m_j} (C_{ij} - M_j)^2}$ ; согласованность тем выше, чем меньше  $V_j$ ;

2.2) коэффициент конкордации  $W = \frac{12}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{i=1}^n T_i} \sum_{j=1}^n d_j^2$ , где

$d_j = s_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j$ ;  $T_i = \sum_{l=1}^L d_l^2 (t_l^2 - t_l)$ ,  $t_l$  – кратность  $l$ -го ранга; полная со-

гласованность экспертов – при  $W = 1$ , согласованности нет при  $W = 0$ .

3. *Статистическая значимость показателя согласованности  $W$*  по критерию Пирсона:  $\chi_n^2 = \frac{1}{mn(n+1) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m T_i} \sum_{j=1}^n d_j^2$  с  $n-1$  степенями свободы.

4. *Коэффициент активности* при ответе на  $j$ -й вопрос:  $K_{эj}^k = \frac{m_j}{m_j}$ .

5. *Учет компетентности экспертов* может быть проведен с помощью

следующих оценок:

5.1) самооценка по балльной или шкальной системе таких объективных показателей, как уровень, широта и стаж специализации по вопросам экспертизы и смежным. Самооценка производится по специальным таблицам, не допускающим произвола и задающим каждому уровню фактора свою балльную оценку, например, по балльной шкале из таблицы 4.4 [2] с вычислением коэффициента осведомленности  $K_{oc} = B / 10$ ;

Таблица 4.4 – Градация самооценки по балльной системе

| Градация   | Балл  |
|--|-------|
| не знаком с вопросом   | 0     |
| плохо знаком, но вопрос входит в сферу знаний и деятельности           | 1,2,3 |
| удовлетворительно знаком, тесно связан со смежной узкой специализацией | 4,5,6 |
| хорошо знаком, принимает практическое участие                          | 7,8,9 |
| вопрос входит в узкую специализацию                                    | 10    |

5.2) самообъективная оценка вычисляется, как сумма оценок степени влияния всех видов источников информации по шкале, приведенной в таблице 4.5 (максимальное значение равно 1).

Таблица 4.5 – Самообъективная оценка по степени влияния всех видов источников информации

| Источники информации                              | Степень влияния источника |         |        |
|---|---------------------------|---------|--------|
|   | высокая                   | средняя | низкая |
| производственный опыт                             | 0,5                       | 0,4     | 0,2    |
| проведенный теоретический анализ                  | 0,3                       | 0,2     | 0,1    |
| обобщение отечественной литературы                | 0,05                      | 0,04    | 0,03   |
| обобщение зарубежной литературы                   | 0,05                      | 0,04    | 0,03   |
| личное знакомство с состоянием вопроса за рубежом | 0,05                      | 0,04    | 0,03   |
| интуиция  | 0,05                      | 0,04    | 0,03   |

### Контрольные вопросы

- 1 Перечислите основные принципы планирования эксперимента.
- 2 Приведите методы определения объема эксперимента?
- 3 Дайте описание методов экспертных оценок?

## 5 КОМПЬЮТЕРНЫЕ ПРОГРАММЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДОРОЖНО-ТРАНСПОРТНЫХ ПРОИСШЕСТВИЙ

### 5.1 Исходные материалы при исследовании ДТП

1. При исследовании ДТП, связанных с наездами на пешеходов.

В постановлении о назначении АТЭ излагаются следующие исходные данные:

1.1. Тип (марка) ТС, число пассажиров, масса груза, техническое состояние.

1.2. Дорожные условия: тип покрытия, продольный профиль, ширина проезжей части, состояние покрытия (сухое, мокрое, грязное, снег, лед и т.д.).

1.3. Характер наезда – в процессе торможения или без него, какой частью ТС контактировало с пешеходом, координаты места контакта относительно габаритов ТС.

1.4. Наличие следов: длина следа торможения (юз) и до оси каких колес он замерен, наличие следов наката после торможения и их длина (могут быть следы заноса и разворота с указанием их длины).

1.5. Место наезда и его удаление от начала или конца следа юза, общая длина следа торможения или расстояние перемещения ТС в заторможенном состоянии после наезда до полной остановки.

1.6. Момент возникновения опасности для движения, а следовательно: путь пешехода, время движения, направление движения (под углом к осевой линии), время на остановку (если она была) пешехода при переходе дороги.

1.7. Расстояние видимости пешехода с рабочего места водителя.

При подготовке исходных данных по наезду, в случаях ограниченной видимости из-за наличия ТС на проезжей части:

– тип (модель) ТС2, место нахождения его относительно проезжей части дороги и ТС1;

– скорость ТС2 и интервал по отношению ТС1, дистанция при попутном движении;

– расстояние от передней или задней части ТС2 до линии движения пешехода в момент начала движения пешехода по проезжей части;

– боковое смещение пешехода на пути по направлению движения ТС1 или навстречу движения ТС1.

Вопросы на разрешение экспертизы:

– с какой скоростью двигалось ТС1 в данных условиях к моменту начала торможения, исходя из указанной в исходных данных длины следа торможения на юз;

– какой остановочный путь имеет ТС1 в условиях места происшествия;

– на каком расстоянии от места наезда находилось ТС1 в момент начала движения пешехода на пути;

– располагал ли водитель ТС1 технической возможностью предотвратить наезд на пешехода в момент начала движения пешехода на пути или появлении его из-за ТС2;

– имел ли возможность потерпевший выйти за пределы полосы движения автомобиля, если бы водитель своевременно применил торможение, при том же темпе движения пешехода;

– какими пунктами Правил дорожного движения должен был руководствоваться водитель автомобиля в данной дорожной ситуации и соответствовали его действия с технической точки зрения требованиям ПДД.

## 2. При исследовании ДТП, связанных с *столкновением ТС*:

2.1. Тип (марка) ТС, масса груза или число пассажиров, техническое состояние ТС.

2.2. Дорожные условия: тип покрытия, продольный профиль дороги, ширина проезжей части, состояние (сухое, мокрое, грязное, снег, лед и т.д.), видимость в направлении движения, наличие дорожных знаков, разметки ТС1 и ТС2, длины следов юза до столкновения и характер следов после столкновения и их длина, было ли их совместное перемещение после столкновения и на какое расстояние, на какой угол развернулись ТС после столкновения.

2.3. Место расположения относительно границ проезжей части; осыпи стекла, осыпи грунта, расположения ТС после ДТП, расположение отделившихся частей ТС.

2.4. Скорость транспортных средств перед ДТП.

2.5. Действия водителей ТС.

2.6. Время движения ТС, создавшего опасность с момента ее возникновения, либо расстояние преодоленное ТС, создавшим опасность, с момента ее возникновения до момента столкновения.

Вопросы на разрешение экспертизы:

– с какой скоростью двигалось ТС1 (или ТС2) перед торможением?

– на каком удалении находилось ТС1 от места столкновения в момент начала движения ТС2 через перекресток (или выезда на его полосу в момент обгона или объезда ТС-3 или в момент возникновения опасности?)

– каков остановочный путь ТС1 в данной ДТС при экстренном торможении в данных дорожных условиях со скорости, установленной экспертом или (следствием)?

– имел ли водитель ТС1 техническую возможность избежать столкновения, если бы применил экстренное торможение в момент или в момент обнаружения опасности в зоне видимости;

– имел ли техническую возможность ( успевал ли) водитель ТС2 выехать за пределы полосы движения ТС-1, если бы последний, двигаясь с разрешенной скоростью, применил торможение в момент возникновения опасно-

сти для движения или в момент обнаружения опасности в зоне видимости;

- какими пунктами Правил должен был руководствоваться водитель ТС1 в данной ДТС и соответствовали ли его действия требованиям ПДД;
- какова с технической точки зрения причина данного происшествия и не находятся ли в причинной связи действия водителя ТС1 или ТС2 с данным происшествием.

При столкновении ТС в отдельных случаях следствию есть необходимость в решении вопросов по транспортной трасологии:

- каков механизм столкновения ТС1 и ТС2?
- каков угол взаимного расположения ТС1 и ТС2 в момент столкновения?
- где относительно границ проезжей части находится место столкновения ТС1 и ТС2?

Для этой цели необходимо кроме указанных ИД представить для осмотра оба транспортных средства с повреждениями без их искажения при транспортировке и хранении до момента осмотра.

3. При исследовании ДТП, связанных с *потерей устойчивости ТС, с ударом о препятствие, столкновением* и т. п.

3.1. Тип (марка) ТС, число пассажиров, масса груза, техническое состояние.

3.2. Дорожные условия: тип покрытия, продольный профиль, ширина проезжей части, состояние покрытия (сухое, мокрое, грязное, снег, лед и т. д.).

3.3. Радиус закругления проезжей части.

3.4. Техническое состояние и скорость ТС.

3.5. Действия водителя перед потерей устойчивости ТС.

Вопросы на разрешение экспертизы:

- какова критическая скорость автомобиля на повороте с данным радиусом?

- возможно ли опрокидывание или занос на повороте с данным радиусом на указанной скорости и указанной загрузке?

- какова причина потери устойчивости транспортного средства, не вызвано ли это техническим состоянием ТС, дорожными условиями или действиями водителя по управлению ТС;

- какими пунктами ПДД следовало руководствоваться водителю в данной ДТС и соответствовали ли его действия требованиям Правил с технической точки зрения.

4. При исследовании ДТП, связанных с маневрированием ТС (в процессе обгона).

Исходные данные включают сведения о плотности и скорости транспортного потока или обгоняемого автомобиля. характер производимого обгона (с выездом из ряда при движении в транспортном потоке), скорость обгоняющего ТС.

Сведения о встречном ТС: скорость, удаление в момент начала обгона.

Действия водителей транспортных средств: обгоняемого, обгоняющего и встречного транспорта;

В данном исследовании могут быть решены следующие вопросы:

– при заданных условиях каково необходимо безопасное расстояние для выполнения обгона;

– каково безопасное расстояние до встречного транспортного средства для выполнения вышеуказанного маневра при исходных данных, указанных в постановлении;

– соответствовали ли действия водителя автомобиля (совершающего обгон) требованиям ПДД и не находятся ли они в причинной связи с происшествием;

– соответствовали ли действия водителя обгоняющего автомобиля и встречного автомобиля требованиям Правил дорожного движения.

5. При исследовании ДТП, связанных с диагностикой технического состояния ТС.

Наиболее вероятные неисправности и отказы, которые могут послужить причиной ДТП:

– неисправности, вызывающие утрату работоспособности (отказ рулевого управления и потерю управляемости автомобиля или устойчивости его движения);

– неисправности, вызывающие утрату работоспособности рабочей тормозной системы или снижению эффективности ее действия;

– неисправности ходовой части, вызывающие самопроизвольное изменение направления движения или потерю устойчивости движения.

Диагностическое исследование технического состояния транспортного средства организуется следствием, с привлечением необходимых сил и средств (подъемно-транспортного оборудования), предоставляется также техническое описание и инструкция по эксплуатации ТС на русском языке.

ТС к месту осмотра доставляются таким образом, чтобы исключить возникновение дополнительных повреждений механизмов и систем, искажения внешних повреждений.

В постановлении отражается место, время, вид ДТП, дорожные условия, характер повреждений ТС, условия его хранения, организации осмотра и



порядок предоставления объектов для исследования, вызванная необходимость экспертного исследования технического состояния данного ТС.

6. При исследовании ДТП, связанных с проверкой показаний.

На разрешение эксперта ставятся вопросы соответствия техническим расчетам показаний водителя автомобиля и могут ли с технической точки зрения произойти действия, на которые ссылается водитель.

## 5.2 Компьютерная программа PC CRASH

Компьютерная программа PC CRASH позволяет моделировать механизм движения ТС (транспортного средства) или сцепки из нескольких с учетом их технического состояния, загрузки, особенностей конструкции. Моделирование возможно в различных дорожных условиях: при наличии участков с различными коэффициентами сцепления покрытия, с разными уклонами поверхности, с учетом сопротивления воздуха (ветровой нагрузки). Важным достоинством программы является возможность определения скоростей движения ТС перед столкновением (на основании моделирования механизма столкновения) по известным исходным данным: месту столкновения, взаимному положению ТС в момент столкновения, конечным положениям после столкновения, режимам движения ТС после столкновения до места остановки. При моделировании движения транспортного средства учитываются в частности следующие параметры: характеристики работы двигателя, параметры трансмиссии (ее передаточные числа), модель шин каждого колеса, параметры работы подвески, распределение нагрузки в ТС, время срабатывания тормозной системы, рулевого привода, скорость вращения рулевого колеса, угол поворота управляемых колес, параметры работы тормозной системы. Посредством задания участков с разными режимами движения транспортного средства моделируется его траектория, максимально повторяющая фактическую, что позволяет рассматривать ряд вопросов, которые иными экспертными средствами решить невозможно.

Программа реконструкции механизма дорожно-транспортного происшествия (ДТП) PC-CRASH обеспечивает:

- динамическое моделирование движения ТС;
- динамическое моделирование столкновений транспортных средств с учетом особенностей технического состояния ТС, загрузки, особенности рельефа поверхности дорожного покрытия и его состояния;
- динамическое изображение реконструированного механизма ДТП в аксонометрической проекции;

– создание видеороликов с расположением камеры в произвольной точке пространства: на дороге, на обочине, на водительском месте.

Анализ моделирования многочисленных crash-тестов [24] при помощи программы PC CRASH показал, что при правильном подборе исходных данных, моделируемый механизм соударения и движения объектов достаточно точно отображает действительную картину теста. Поэтому работа с программным модулем требует теоретических знаний и практического опыта в области механики столкновений, динамики движения ТС, что может быть достигнуто только при должном обучении и возможности доступа к необходимым источникам информации.

### 5.2.1 Обзор основных команд программы

После запуска программы появляется основное окно, которое составляют рабочая область программы, заголовок окна, основное меню, панель инструментов и строка состояния (рисунки 5.1 – 5.12).

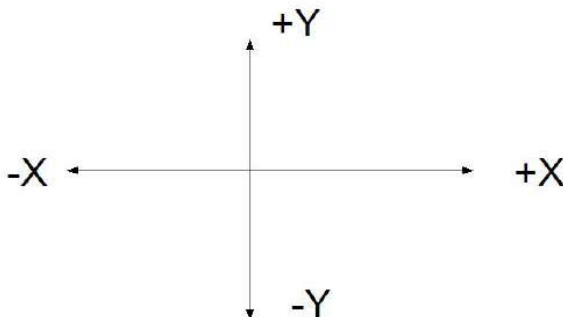


Рисунок 5.1 – Основное окно программы

В рабочей области программы – направление вправо (координата  $X$ ) и вверх (координата  $Y$ ) положительное, положительное направление поворота – против часовой стрелки.

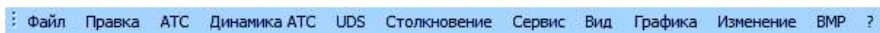


Рисунок 5.2 – Основное меню



Рисунок 5.3 – Панель инструментов



Рисунок 5.4 – Панель инструментов моделирования



Рисунок 5.5 – Панель инструментов изображений



Рисунок 5.6 – Панель инструментов для обработки файлов



Рисунок 5.7 – Строка пиктограмм для изображения локальной поверхности трения



Рисунок 5.8 – Строка пиктограмм для создания наклонных поверхностей и трехмерных дорожных объектов



Рисунок 5.9 – Строка пиктограмм для изображения траектории движения

а)

б)

в)

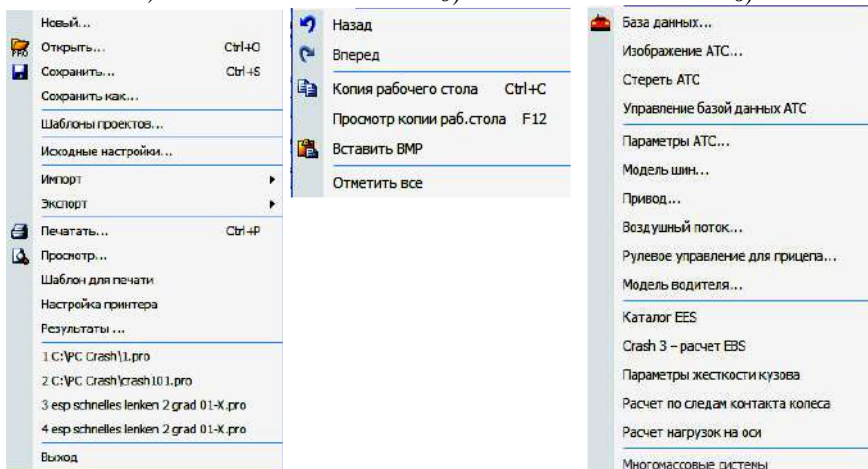


Рисунок 5.10 – Меню программы:

а – «Файл»; б – «Правка»; в – «Автотранспортного средства»

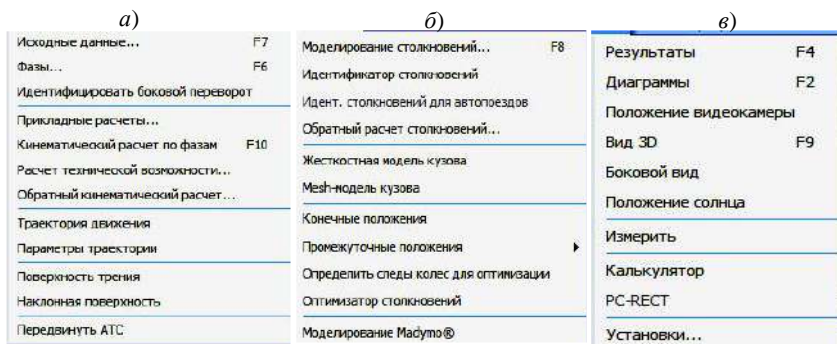


Рисунок 5.11 – Меню программы:  
 а – «Динамика ТС»; б – «Столкновение»; в – «Сервис»

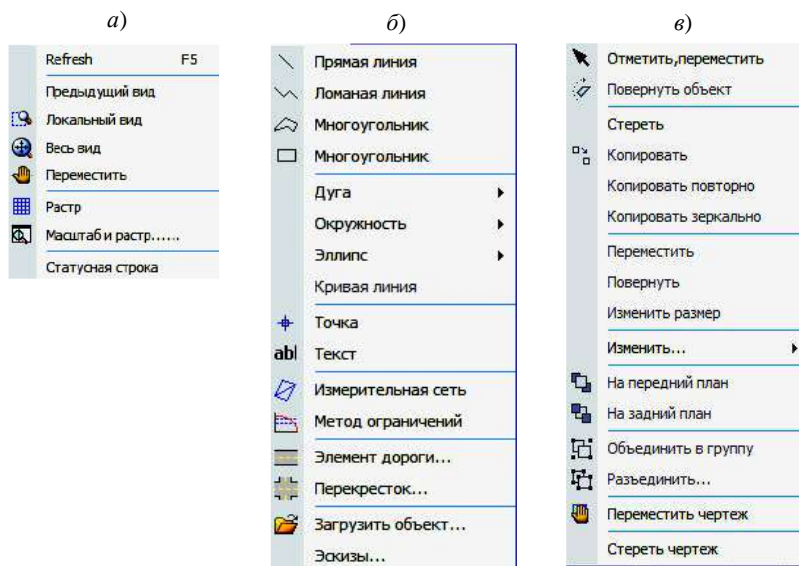


Рисунок 5.12 – Меню программы:  
 а – «Вид»; б – «Графика»; в – «Изменение»

### 5.2.2 Дорожные объекты

Для корректного анализа механизма исследуемого ДТП необходимо точно отобразить в масштабе схему, на которой зафиксированы следы, конечные положения ТС и другие объекты. Для этого программа имеет следующие возможности изображения дорожных объектов на плоскости:

- 1) создание индивидуальной схемы;

- 2) использование стандартных функций изображения «Элемент дороги» и/или «Перекресток», хранящихся в базе данных графических изображений;
- 3) загрузка графического изображения ранее составленной схемы.

Для создания масштабных чертежей необходимо выбрать соответствующие инструменты из строки пиктограмм или меню графика (прямая линия, кривая, прямоугольник и т. д.). Будут активированы окна, где можно изменить параметры линии и свойства графического объекта (рисунок 5.13).

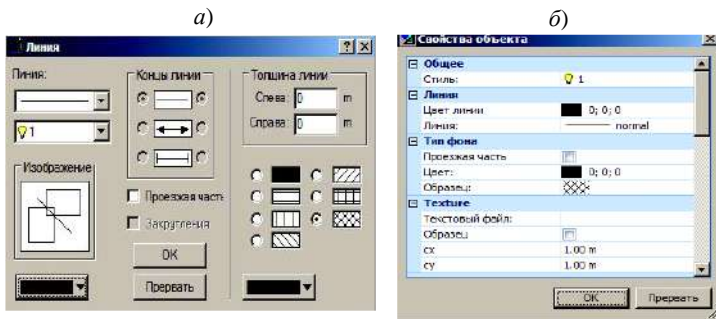


Рисунок 5.13 – Меню графических элементов:  
*а* – параметры линии; *б* – свойства графического объекта

При помощи инструментов для изображения графических фигур, а также, воспользовавшись базой данных графических изображений, могут быть созданы наглядные масштабные чертежи, отражающие ситуацию в интересующий момент времени (рисунок 5.14).

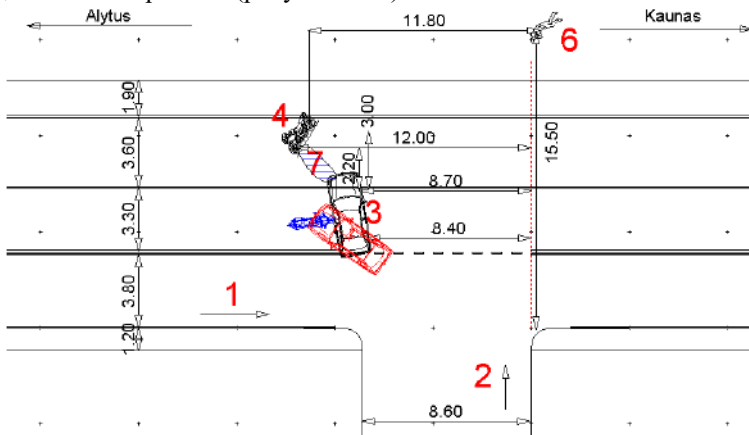


Рисунок 5.14 – Пример создания графических элементов

При создании масштабного участка дороги используются функции изображения <Элемент дороги> и/или <Перекресток> (рисунок 5.15, 5.16).

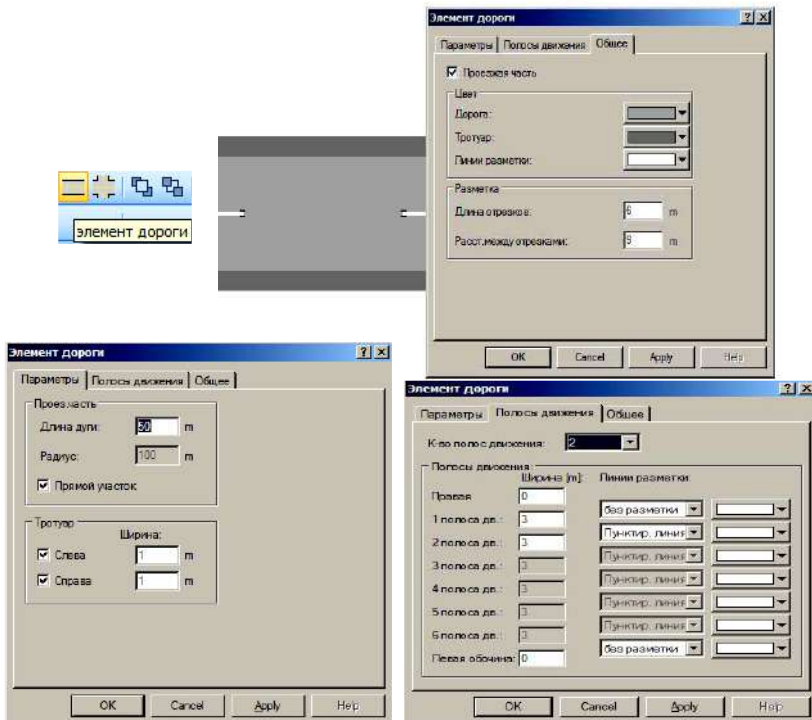


Рисунок 5.15 – Инструментарий создания элемента дороги

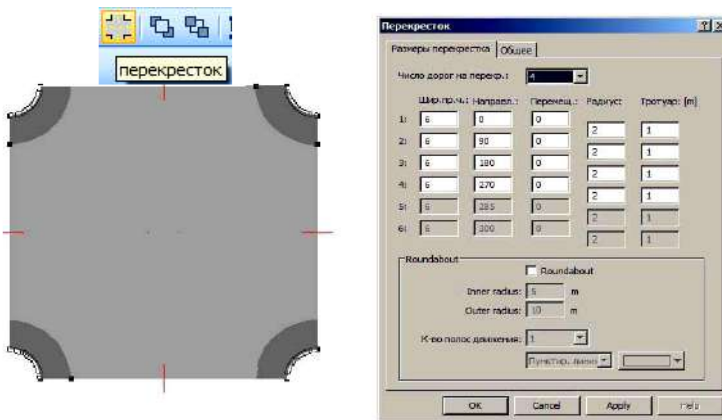


Рисунок 5.16 – Инструментарий создания перекрестка

В настоящее время доступны спутниковые фотографии участков земной поверхности, поэтому во многих случаях такими фотографиями удобно пользоваться для моделирования механизма ДТП. Отсняв фотографию нужного участка (рисунок 5.17), данное изображение можно загрузить на рабочий стол при помощи функции <Импорт> и <ВМР>. Далее необходимо изображение привести к масштабу рабочего стола программы (<ВМР> и <Изменить размер>). Следует отметить, что импортируемые графические элементы не оказывают влияния на параметры их движения.

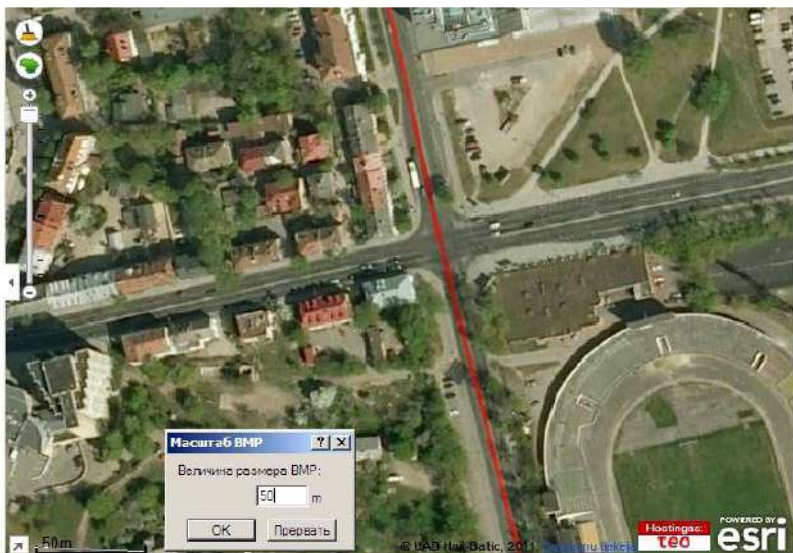


Рисунок 5.17 – Пример импортирования изображения

Поверхность с локальным коэффициентом сцепления является активным элементом при моделировании в динамике. Параметры поверхности вносятся при помощи набора пиктограмм (рисунок 5.7) или с помощью команд «Динамика ТС» и «Поверхность трения» (рисунок 5.18).

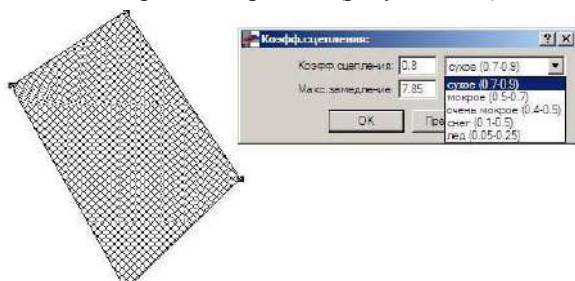


Рисунок 5.18 – Инструментарий коэффициента сцепления поверхности



Определение наклонной поверхности возможно при помощи набора пиктограмм (рисунок 5.8) или с помощью команд «Динамика ТС» и «Наклонная поверхность» (рисунок 5.19).

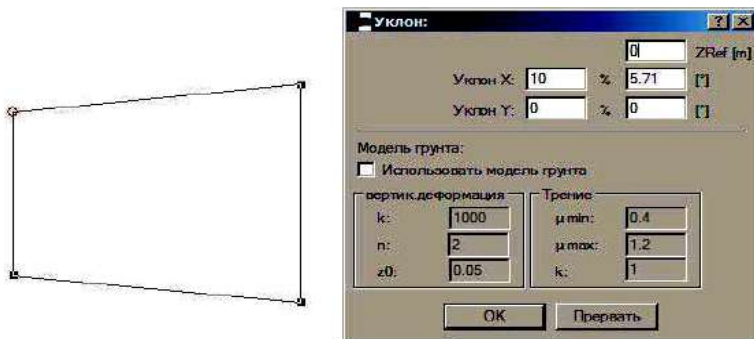



Рисунок 5.19 – Инструментарий параметров наклонной поверхности

Локальные дорожные объекты, имеющиеся на ровной дорожной поверхности, например, центральный островок удобно создавать при помощи функции триангуляции. Для этого сначала изображаем два закрытых контура, отображающих геометрическую форму проекции верхней и нижней части объекта. Далее верхний контур поднимаем на нужную высоту относительно нижнего контура. Отметив оба контура, применяем функцию триангуляции (пиктограмма ). Программа распознает созданный объект как активный, имеющий влияние на движение ТС (рисунок 5.20).

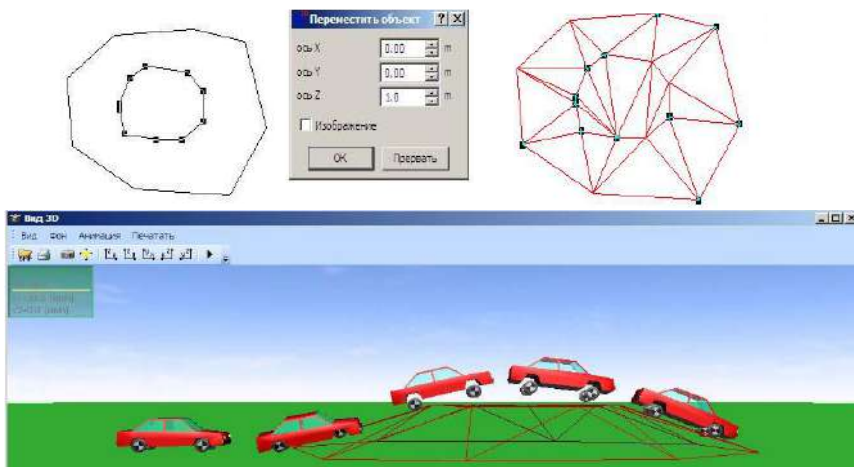


Рисунок 5.20 – Инструментарий создания объекта и пример реализации



Пространственный дорожный объект с учетом параметров проезжей части, обочин и склонов можно создать при помощи группы пиктограмм (рисунок 5.8). На рисунке 5.21 представлен участок дороги: подъем, с поворотом влево, переходящим в прямой участок дороги, с указанием профиля придорожных рвов. При создании такого пространственного дорожного объекта целесообразно задать проекцию сверху («Характеристика» и «Радиус»). Далее указываем продольный профиль (подъем) через координаты соответствующих точек («Характеристика» и «Продольный профиль»). Поперечный профиль проезжей части в данном примере без уклона («Характеристика» и «Поперечный профиль»), ширина проезжей части по всей длине участка постоянная («Характеристика» и «Ширина проезжей части»). Профиль придорожного рва (склона) задан графически («Характеристика» и «Профиль придорожного рва»).

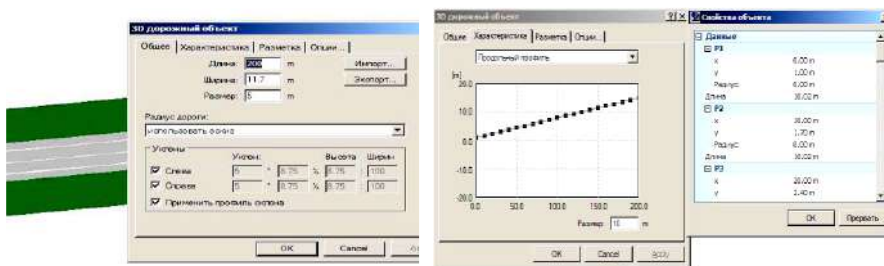


Рисунок 5.21 – Пример создания участка дороги

### 5.2.3 Параметры транспортных средств и других объектов

Выбрать ТС из базы данных можно из меню «ТС» – «База данных...». При этом будет открыто окно для выбора, в котором необходимо указать критерии поиска (тип ТС, марку и модель, год производства, рисунок 5.22).

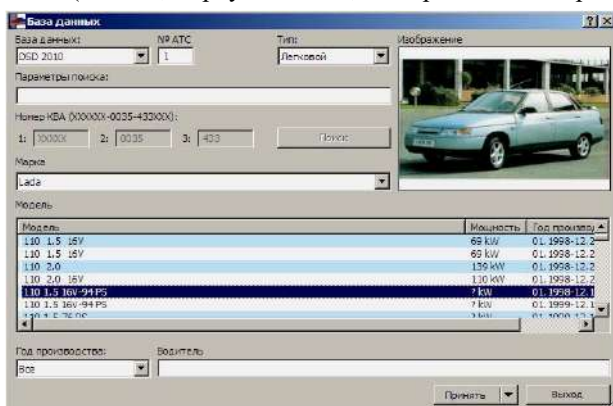


Рисунок 5.22 – Пример выбора ТС из базы данных

Вместе с рисунком 5.22 открывается окно «Параметры», в котором можно уточнить характеристики выбранного ТС. При подтверждении выбора («Принять») на экране появится изображение ТС в виде прямоугольника, в соответствии с его геометрическими параметрами. Чтобы загрузить масштабное изображение ТС на рабочий стол, необходимо выбрать команду («ТС» – «Изображение ТС» – «Файлы» – «Вид 2D» – «Открыть DXF»), и далее в следующем окне из соответствующей папки выбрать изображение (вид сверху) для конкретного ТС (рисунок 5.23).

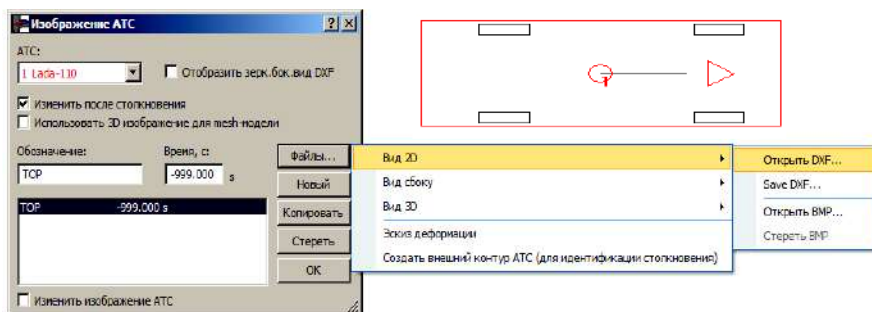


Рисунок 5.23 – Пример детализации изображения ТС

При использовании команд «Сервис» и «Вид 3D» появляется изображение ТС, которое определяет параметры с помощью «ТС» – «Параметры ТС» – «Форма кузова» (рисунок 5.24).

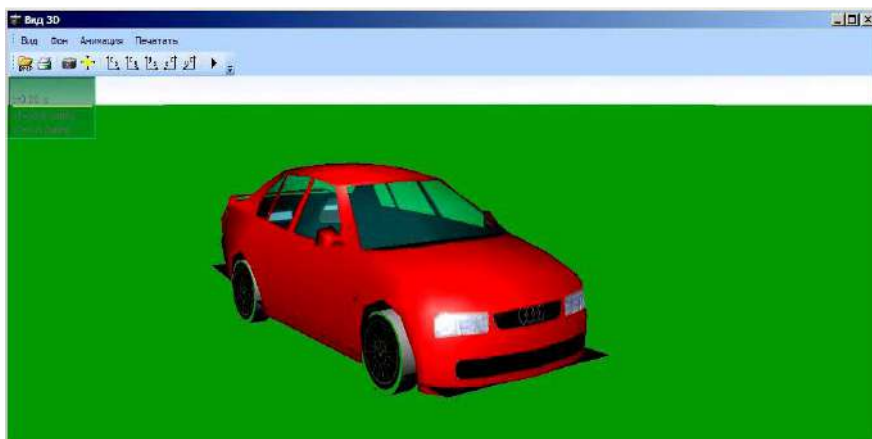


Рисунок 5.24 – Пример 3D изображения ТС

При загрузке пространственного изображения в форматах idf, dxf, x61 или fce при моделировании наезда на пешехода или же для переворота ТС будет принята в учет действительная внешняя геометрическая форма ТС.

Параметры выбранного ТС можно просмотреть и при необходимости изменить с помощью опции «ТС» – «Параметры ТС» и последующих окон: «Размеры и вес», «Подвеска», «Нагрузка», «Тормозная сила колес задней оси», «Сцепное устройство», «Форма кузова», «Параметры столкновения» и ESP (рисунок 5.25).

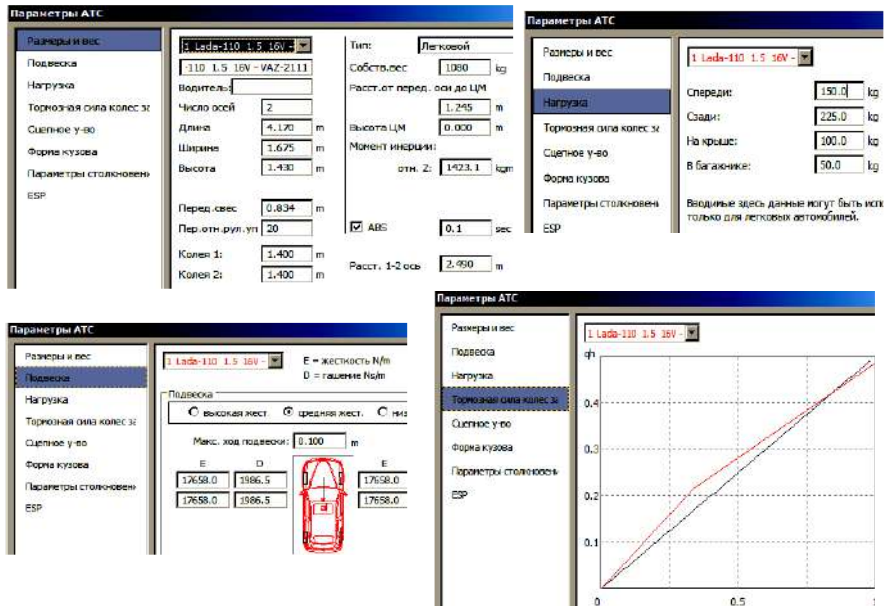


Рисунок 5.25 – Изменение параметров ТС

Параметры в окне «Подвеска» и «ESP» могут быть значимы при моделировании движения в экстремальных условиях, а параметры окна «Тормозная сила колес задней оси» – при моделировании торможения ТС без системы антиблокировки тормозов.

Для проведения моделирования движения ТС при необходимости следует откорректировать параметры в окнах, которые могут существенно определять параметры движения в окнах «ТС» – «Модель шин», «ТС» – «Привод», «ТС» – «Воздушный поток». Для прицепов с управляемой осью необходимо задать параметры кинематики рулевого управления прицепа в зависимости от угла между продольными осями тягача и прицепа (рисунок 5.26).

Начальные условия движения ТС необходимо задать в окне «Динамика ТС» – «Исходные данные». В зависимости от расположения центра масс («ТС» – «Параметры ТС...» – «Размеры и вес»), исходные данные будут представлены соответственно для плоской или пространственной модели ТС.

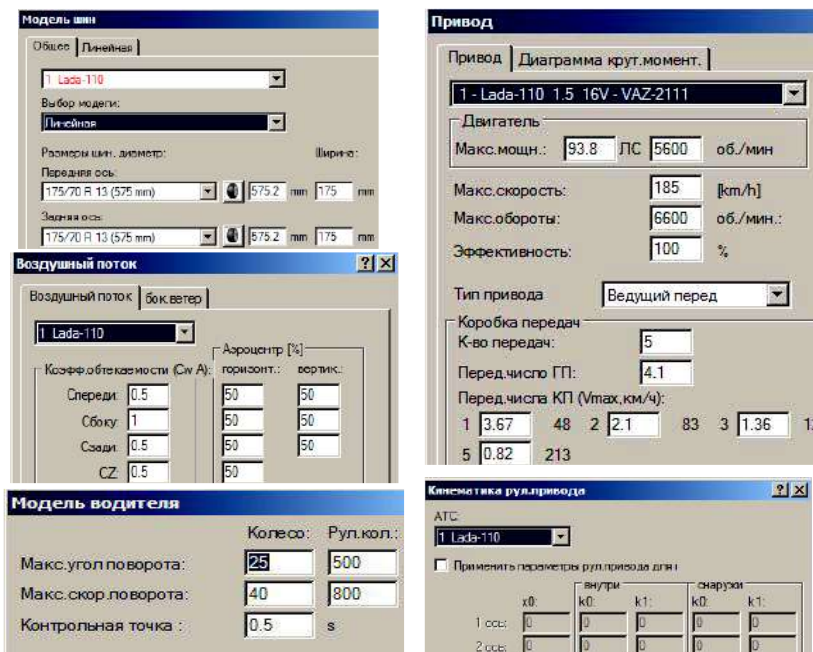


Рисунок 5.26 – Детализация параметров ТС

Пометив критерий «=», программа автоматически скорректирует равенство направляющего (PSI) и курсового (NY) углов автомобиля, т. е. движение без бокового увода (рисунок 5.27).

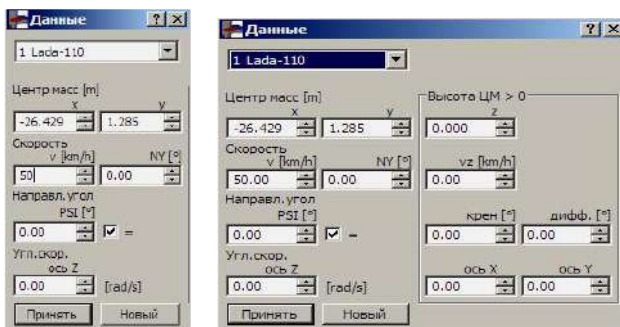


Рисунок 5.27 – Начальные условия движения ТС

Кроме ТС могут быть смоделированы многие другие объекты. Их можно загрузить в программу через команду «Файл» – «Импорт» – «Параметры ТС» – «Objects» («Bicycle» – велосипедист, «Bus» – автобус, «Motorcycle» – мотоцикл, «Pedestrian» – пешеход, «Roadside Barrier» – дорожные огражде-

ния, «Tractor» – трактор, «Trailer» – прицеп, «Tree» – дерево, «Truck 2 axle» – двухосный грузовик, «Truck 3 axle» – трехосный грузовик, «Truck 4 axle» – четырехосный грузовик, «Wall» – стена).

#### 5.2.4 Моделирование движения

Для моделирования движения ТС необходимо задать: начальные параметры; способ моделирования (кинематика или динамика); управляющие воздействия; задать параметры среды движения. Выбор ТС из базы данных, а также задание начальных параметров движения представлены в подразделе 5.1.3.

Способ движения – кинематика или динамика, определяется подбором соответствующей опции («Динамика/кинематика») в строке состояния, расположенной в нижней части экрана, либо при помощи пиктограммы.

Существенным моментом в моделировании движения автотранспортных средств является определение фаз движения, которое осуществляется через команду «Динамика ТС» – «Фазы...». Выбрав эту команду, появится окно с заданными по умолчанию фазами: «Реакция»– «Торможение» – «Старт»– «Торможение». Посредством команды «Изменить» фазы можно копировать, добавлять и стирать (рисунок 5.28).

Выбрав команду «Фазы» – «Фазы» появится возможность определить отрезки движения ТС во времени или по расстоянию («Реакция», «Торможение», «Ускорение», «Столкновение»).

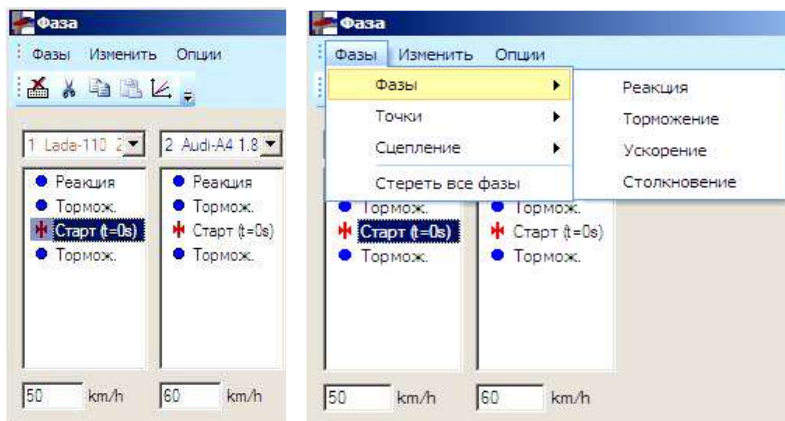


Рисунок 5.28 – Определение фаз движения

Выбрав команду «Фазы» – «Точки» появится возможность определить моментное изменение параметров движения ТС («Стоп», «Старт», «Синхронизация», «Скорость max. min.», «Изменение геометрии подвески», «Изменение геометрии кузова» и «Обрыв прицепа»). При помощи команды «Фазы» – «Сцепление» может быть задан коэффициент сцепления для каж-

дого из колес и зависимости коэффициента сцепления от скорости движения (рисунок 5.29).

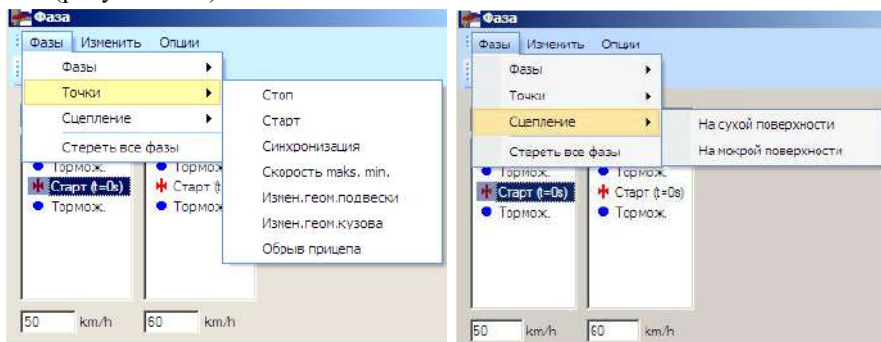


Рисунок 5.29 – Изменение параметров движения и коэффициента сцепления

Фазой «Реакция» задается движение ТС с постоянной скоростью в течение определенного времени или на определенном расстоянии. Щелкнув левой клавишей мыши на заданной фазе «Реакция» откроется окно, в котором по умолчанию указано время этой фазы. По умолчанию принимается значение, указанное в «Сервис» – «Установки» – «Приоритеты» (рисунок 5.30). При необходимости эта фаза может быть задана не промежутком времени, а расстоянием.

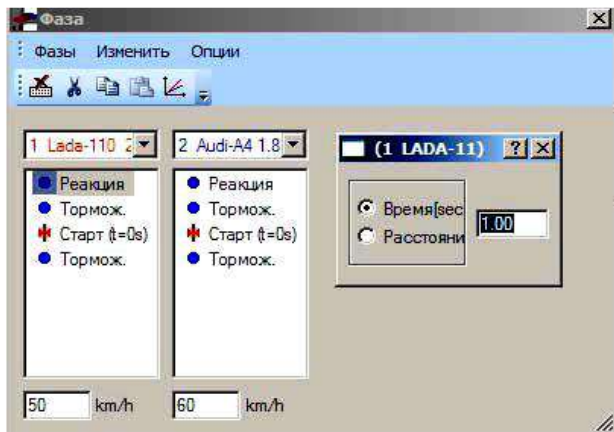


Рисунок 5.30 – Изменение параметров фазы «Реакция»

Если между фазами «Торможение» и «Ускорение» введена только одна фаза движения с постоянной скоростью («Реакция»), то программа автоматически принимает в учет для данной фазы линейное уменьшение тормозной силы. Если же необходимо исключить такой процесс изменения тор-



мозной силы, то необходимо ввести дополнительный интервал (фазу «Реакция»).

Фазой «Торможение» задается движение ТС с замедлением в течение определенного времени или на определенном расстоянии (рисунок 5.31). Щелкнув левой клавишей мыши на фазе «Торможение» откроется окно, в котором по умолчанию указано время нарастания замедления (по умолчанию принимается значение, указанное в «Сервис» – «Установки» – «Приоритеты»). Эта фаза может быть задана промежутком времени или расстоянием (выбрав соответствующую опцию и указав значение параметра в опции «Продолжительность»).

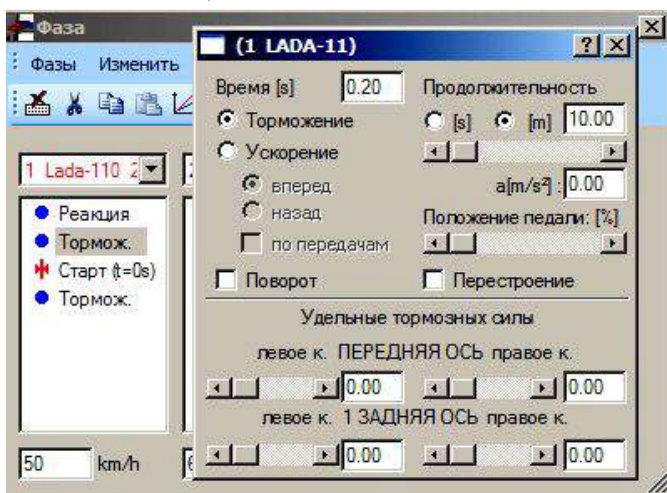


Рисунок 5.31 – Изменение параметров фазы «Торможение»

Интенсивность торможения может быть задана одним из трех возможных способов:

- абсолютное значение замедления (« $a$  [ $m/s^2$ ]»);
- относительное положение педали тормоза («Положение педали %»);
- значение удельной тормозной силы на каждом из колес («Удельные тормозные силы»).

Применив один из способов определения замедления, будут представлены расчетные значения параметров в других полях (рисунок 5.32).

Пометив опцию «Ускорение» и задав значение ускорения (одним из 3-х способов, как и для торможения), будет смоделировано движение ТС при разгоне (вперед или назад). Если же активна опция «по передачам», то программа рассчитает разгон автомобиля с учетом характеристик двигателя и передаточных отношений трансмиссии, параметры которых заданы командой «ТС» – «Привод».

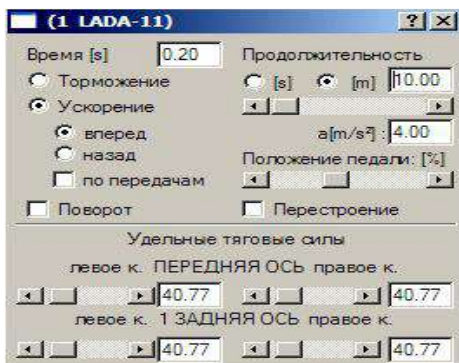


Рисунок 5.32 – Редактирование интенсивности торможения

Поворот рулевого колеса может быть задан, активизировав в данном окне опцию «Поворот». При этом весь процесс вращения рулевого колеса может быть определен как совокупность нескольких фаз «Торможение» или «Ускорение», указав в каждой фазе конкретный промежуток времени и параметры поворота рулевого колеса. В этом случае должны быть согласованы параметры управляющих воздействий на границах фаз (рисунок 5.33).

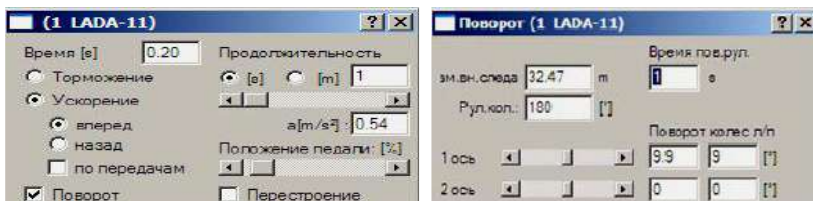


Рисунок 5.33 – Редактирование поворота рулевого колеса

Синусоидальный поворот рулевого колеса (например, перестроение) задается опцией «Перестроение» (рисунок 5.34). В появившемся окне необходимо указать параметры движения ТС при перестроении: боковое смещение, максимальное боковое ускорение, скорость поворота управляемых колес, а также указать направление смещения. Интенсивность маневра будет учтена, указав соответствующий критерий (быстро, средне, медленно), либо указав значение параметра «Интенсивность маневра».

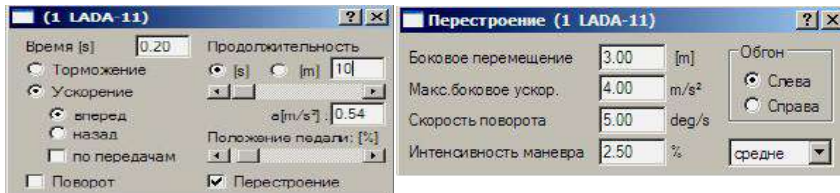


Рисунок 5.34 – Применение опции «Перестроение»



Задав фазу «Столкновение» появляется возможность смоделировать моментное изменение скорости движения ТС (рисунок 5.35), указав этот параметр в последующем окне (если скорость ТС увеличилась, то вводимое значение должно быть отрицательным).

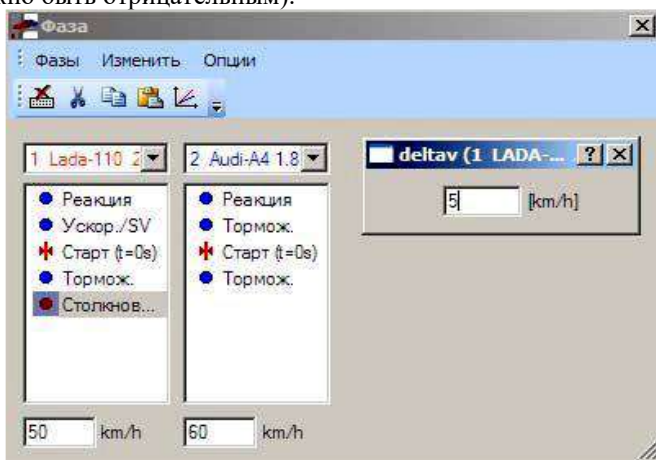


Рисунок 5.35 – Редактирование фазы «Столкновение»

Задавая команду «Фазы» – «Точки» – «Стоп» останавливаем автотранспортное средство между соответствующими заданными фазами (рисунок 5.36). Командой «Фазы» – «Точки» – «Старт» обнуляем время и расстояние (это имеет значение только на диаграммах). Фазой «Синхронизация» приводим параметры движения нескольких ТС к общему моменту времени или расстояния (только на диаграммах).

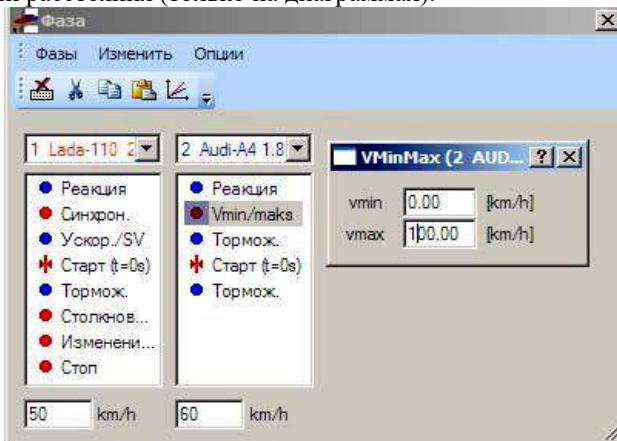


Рисунок 5.36 – Мгновенные параметры движения нескольких ТС

Задав фазу «Изменение геометрии подвески» имеется возможность изменить параметры расположения колес ТС (координата  $X$  «+» смещение вперед, «-» смещение назад; координата  $Y$  «+» смещение влево, «-» смещение вправо; координата  $Z$  «+» смещение вверх, «-» смещение вниз) (рисунок 5.37).

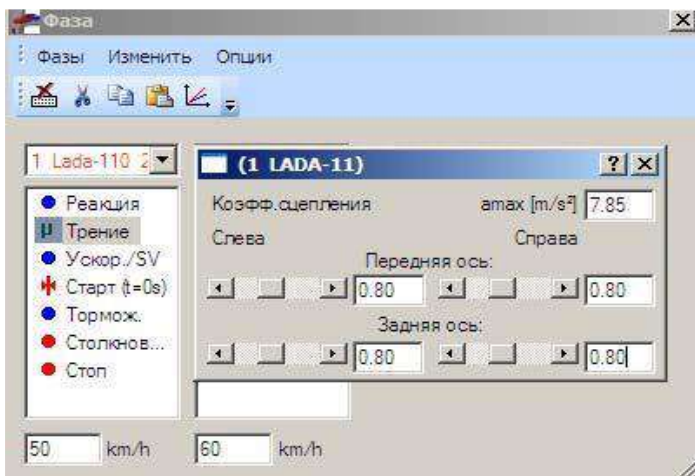



Рисунок 5.37 – Изменение параметров расположения колес ТС

Фаза «Обрыв прицепа» позволяет моделировать процесс разъединения прицепа с тягачом без воздействия значительной силы. Если же необходимо принять в учет, что разъединение прицепа с тягачом произошло вследствие воздействия значительных сил, то значение максимальной силы необходимо задать в окне «Параметры ТС...» – «Сцепное устройство».

Применив фазу «Сцепление» – «на сухой поверхности» имеется возможность изменить параметры сцепления каждого из колес ТС (по умолчанию используется значение, указанное в «Сервис» – «Установки» – «Приоритеты»). Измененные значения будут приняты при расчете параметров замедления ускорения в последующих фазах «Торможение» и «Ускорение».

Применив фазу «Сцепление» – «на мокрой поверхности» имеется возможность ввести критерии изменения коэффициента сцепления дорожной поверхности в зависимости от скорости (это актуально для мокрой дороги). При этом следует помнить, что данная зависимость существенна при анализе динамики движения неповрежденного ТС. Если же рассматриваем процесс движения ТС после столкновения, то эта фаза не задается.

При моделировании движения автомобилей в динамике необходимо учитывать влияние систем активной безопасности (ABS, ESP). Для этого необходимо активизировать соответствующие опции в окне «Параметры ТС».

Движение ТС по заданной траектории задаётся при помощи набора пиктограмм  или через команды «Динамика ТС» – «Траектория движения»: необходимо изобразить траекторию движения для конкретного транспортного средства. Траектория между заданной начальной (А) и конечной точками (Е) будет заменена кривой линией, а траектория до начальной и после конечной точек будет представлена касательными к этим начальной и конечной точкам прямыми линиями (рисунок 5.38).

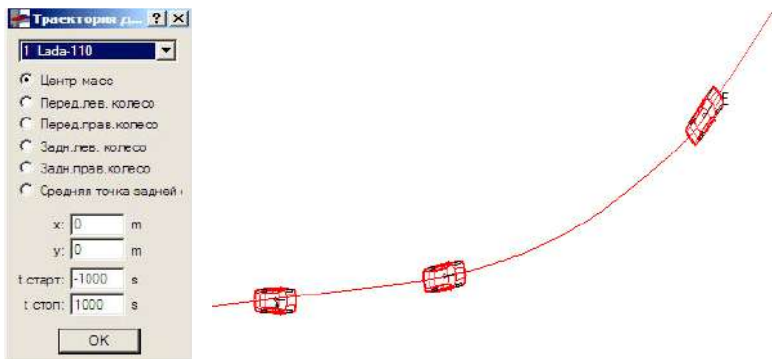


Рисунок 5.38 – Траектория ТС между заданной начальной и конечной точками при моделировании движения в кинематике

При помощи команды «Динамика ТС» – «Параметры траектории» необходимо определить, какая точка транспортного средства должна соответствовать заданной траектории. При моделировании движения в кинематике движение ТС будет полностью соответствовать заданной траектории. При моделировании движения в динамике действительная траектория ТС будет соответствовать заданной траектории настолько, насколько это возможно согласно конкретным условиям – начальных условий движения, параметров ТС, условий среды (коэффициента сцепления, наклон дороги, боковой ветер), а также параметров модели водителя. Ниже представленный пример иллюстрирует, что заданная траектория движения невозможна (в данном случае – из-за слишком высокой начальной скорости, рисунок 5.39).

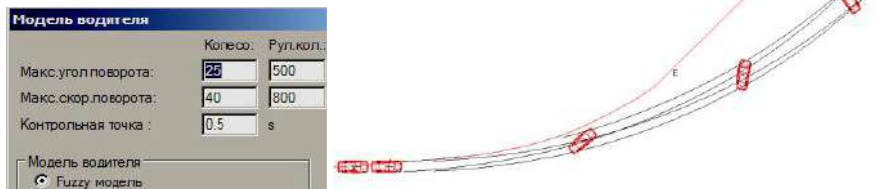


Рисунок 5.39 – Траектория ТС между заданной начальной и конечной точками при моделировании движения в динамике

Управление моделированием основано на инструментари, представленном на рисунке 5.40.



Рисунок 5.40 – Панель инструментов для управления моделированием

В этом окне предусмотрены следующие опции: определение интервала времени для обновления изображения на экране; запись и блокировка от изменения моделирования; переход к начальному положению при моделировании;

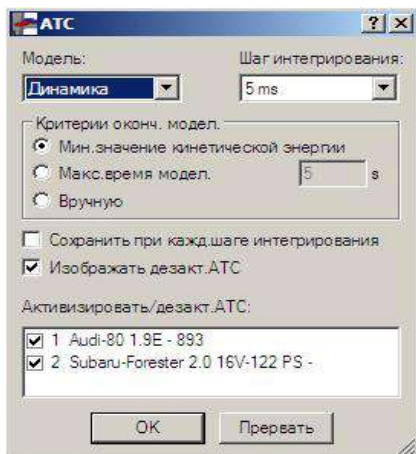


Рисунок 5.41 – Редактор параметров моделирования

пошаговое моделирование назад; пошаговое моделирование вперед; возврат объектов моделирования в начальное положение и активация нового моделирования; переход к конечному положению; блокировка моделирование вперед; быстрый просмотр моделирования; время моделирования. При введении значения времени будут показаны позиции объектов моделирования в данный момент.

В окне активизировать/дезакт. АТС необходимо указать: модель (динамика/кинематика); шаг интегрирования; критерии окончания моделирования; активные ТС (рисунок 5.41).

### 5.2.5 Расчет и моделирование столкновений

Программа PC Crash позволяет выполнить анализ столкновений в прямом и обратном расчете.

Прямой анализ столкновений – это алгоритм расчет параметров движения ТС (или других объектов), производимый из начальных положений, основываясь на параметрах движения ТС в момент столкновения, которые предварительно оцениваются по результатам подходящих тестов или индивидуально экспертом. Значения этих параметров являются исходными для используемой расчетной модели. Движение соударяющихся объектов математически моделируется для столкновения и фазы движения после столкновения на основе запрограммированного алгоритма, вплоть до конечных положений. Рассчитанные значения и смоделированный механизм столкновения сравниваются с реальным (имевшим место) механизмом ДТП.

Для прямого расчета столкновений могут быть применены различные модели удара, основывающиеся на соответствующих допущениях (гипоте-

зах) и ограничениях. При необходимости может быть применена оптимизация. Это приоритетный метод расчета, поскольку он основывается на использовании верифицированных математических моделей, описывающих динамику соударений ТС.

Обратный анализ столкновений – расчет параметров движения ТС, производимый из конечных положений, основываясь на известные параметры их движения после столкновения, вплоть до исходного положения на месте столкновения. Искомыми являются значения скоростей непосредственно перед столкновением.

Прямой анализ столкновений в программе можно выполнить на основе трех моделей: классической модели Кудлиха-Слибара; жесткостной модели; сеточной (Mesh) модели.

*Модель Кудлиха-Слибара.* На рисунке 5.42 изображены два автомобиля в позиции соударения. Предположим, что перед столкновением автомобили двигались поступательно и скорость первого автомобиля в момент столкновения составляла  $V_1$ , а второго –  $V_2$ . На иллюстрации изображены векторы начальных (исходных) импульсов – соответственно  $m_1V_1$  и  $m_2V_2$ . В момент соударения на автомобили действовали ударные импульсы  $S_1$  и  $S_2$ , равные по величине и противоположные по направлению.

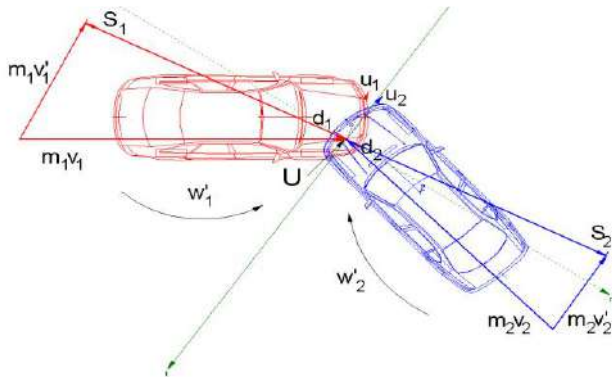


Рисунок 5.42 – Анализ столкновений на основе классической модели Кудлиха-Слибара

В момент начала фазы восстановления (реституции) центра масс автомобилей двигались по направлению векторов конечных импульсов  $m_1V_1'$  и  $m_2V_2'$ , а сами автомобили после соударения вращались с угловыми скоростями  $\omega_1'$  и  $\omega_2'$ .

В области непосредственного контакта кузова автомобилей деформировались, так что контактирующие поверхности соприкасались по некоторой общей поверхности. Для упрощения принимается, что ударный импульс на каждое из тел воздействовал в некоторой общей для них точке  $U$ , которая

расположена на общей поверхности контакта автомобилей. Эту общую для обеих автомобилей точку называем импульсной или контактной точкой. Если бы деформирующиеся структуры кузова ТС были бы гомогенны, то эта импульсная точка располагалась бы в геометрическом центре деформированной области. На самом деле, жесткость структуры кузовов обычно различна как по ширине деформированной области, так и по глубине деформации. Поэтому, придерживаясь общего принципа относительно расположения контактной точки (примерно в геометрическом центре деформированных поверхностей ТС, в проекции сверху), делаем необходимые коррекции, сдвигая эту точку ближе находящимся в деформированной зоне более жестким элементам (лонжероны, стойки и т. д.) кузова автомобиля.

Импульсная точка принадлежит обоим автомобилям, т. е. имеем по существу 2 точки –  $U_1$  и  $U_2$ . В момент окончания фазы деформации эти точки совпадают. В момент начала фазы восстановления (взаимного отталкивания автомобилей) эта общая точка как бы раздваивается – точка  $U_1$  движется совместно с первым автомобилем,  $U_2$  – со вторым. На иллюстрации изображены векторы  $U_1$  и  $U_2$  этой контактной точки, которые различны как по направлению, так и по величине. На основе выполненных краш-тестов установлено, что в большинстве случаев разница проекций скоростей на направление нормали составляет от 2 до 11 км/ч (т. е., в среднем 5–6 км/ч). Данный параметр одним из основных исходных (либо контрольных) при анализе столкновений, его значение связано со значением коэффициента восстановления (в среднем 0,1).

В импульсной точке располагаем начало координатной системы  $U_{in}$ , где ось  $t$  – касательная (тангенциальная), а ось  $n$  – нормаль. Суть этой координатной системы в том, что скольжение контактирующих поверхностей (если такое наступает) происходит вдоль тангенциальной оси, а ударный импульс действует по направлению, близкому к направлению нормали.

Расстояние от контактной точки по направлению нормали до внешнего недеформированного контура каждого из автомобилей есть величина деформации (соответственно  $d_1$  и  $d_2$ ).

В модели Кудлиха-Слибара приняты следующие допущения:

- учитываются только силы, действующие между соударяющимися объектами;
- время столкновения принимается бесконечно малым;
- направление ударной силы неопределенно, а ее величина бесконечно большая.

В *жесткостной* модели удара контактные силы между двумя или более ТС рассчитываются по зависимости между деформирующей силой и величиной деформации. Сила в контакте рассчитывается в зависимости от деформации для каждого из ТС на каждом шаге интегрирования.

Контактная сила рассчитывается для каждого узла сетки, по величине деформации этого узла. В основе расчета лежит модель контакта сетки с недеформируемой контактной поверхностью (рисунок 5.43). Узлы сетки рассматриваются как возможные места контакта, а плоскости – как контактные поверхности. Задавая значения коэффициента трения в контакте для отдельных узлов и поверхностей, есть возможность моделировать также и процессы скольжения.

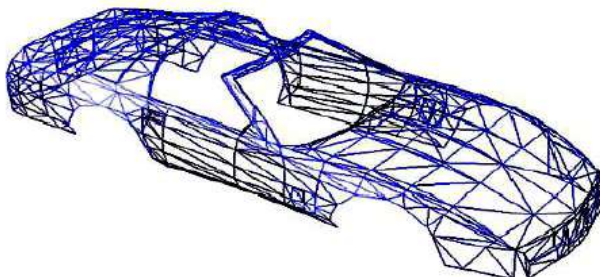


Рисунок 5.43 – Пример модели сетки ТС

Для каждого узла сетки индивидуально задаются такие свойства, как жесткость, коэффициенты восстановления и трения. Жесткость отдельных узлов рассчитывается в зависимости от площади контактирующих плоскостей. При помощи сеточной модели появляется возможность определить остаточные деформации ТС через деформации поверхностей сетки.

При расположении анализе столкновения имеется возможность вести анализ параметров столкновения, открыв окно «Моделирование столкновений» («Столкновение» – «Моделирование столкновений»), рисунок 5.44)

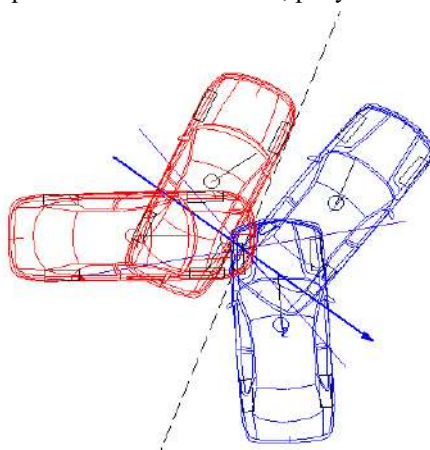
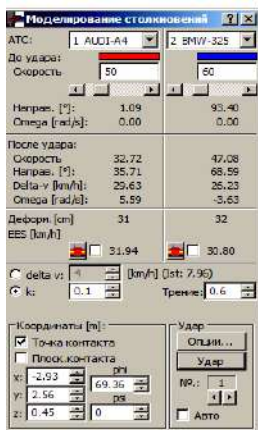


Рисунок 5.44 – Редактор анализа параметров столкновения

Значение некоторых параметров в окне «Моделирование столкновений»:  
«Omega [rad/s]» – значение угловой скорости вращения относительно вертикальной оси (рад/с);

«Delta-v» – изменение значения скорости ТС за время удара;

«Деформ.» – величина деформации для каждого из объектов (см);

«EES [km/h]» – значение скорости, эквивалентной энергии деформации;

«delta-v» – значение разницы скоростей импульсной (контактной точки);

«k» – значение коэффициента восстановления (среднее значение 0,1);

«Трение» – значение коэффициента трения в зоне контакта (среднее значение 0,6);

«Точка контакта» – активация изменения положения контактной точки;

«X, Y, Z» – координаты контактной точки;

«Плоск.контакта» – активация изменения положения контактной плоскости;

«phi» – угол поворота контактной плоскости относительно оси Z;

«psi» – угол поворота контактной плоскости относительно вертикальной плоскости;

«Удар» – производится расчет параметров столкновения;

«№» – возможность перехода к сохраненному столкновению;

«Авто» – активация автоматического режима расчета столкновений.

Нажав клавишу «Опции» откроется окно «Основные установки», где можно определить критерии для анализа столкновений:

– применить функцию автоматического позиционирования импульсной точки в центре общей геометрической области;

– применить идентификатор столкновений;

– применить автоматический расчет вторичного и последующего столкновений;

– установить время взаимного внедрения ТС, после достижения которого должен быть выполнен расчет столкновения (в автоматическом режиме).

В программе задействован *оптимизатор столкновений*, который во многих случаях позволяет ускорить процесс определения параметров столкновения.

Алгоритм работы с оптимизатором следующий:

1) расположение ТС в позиции столкновения, подбор примерных начальных параметров ТС перед столкновением;

2) определение параметров после столкновения «Фазы» – «Торможение»;

3) визуализация конечных положений ТС при помощи функции «Столкновение» – «Конечные положения». При необходимости фиксации промежуточных положений используется функция в редакторе «Столкновение» – «Промежуточные положения». Если зафиксированы следы колес, то акти-



визируем функцию «Столкновение» – «Определить следы колес для оптимизации» и изображаем следы колес ТС;

4) применение оптимизатора столкновений «Столкновение» – «Оптимизатор столкновений».

В появившемся окне необходимо указать параметры, согласно которых должна быть произведена оптимизация (рисунок 5.45).

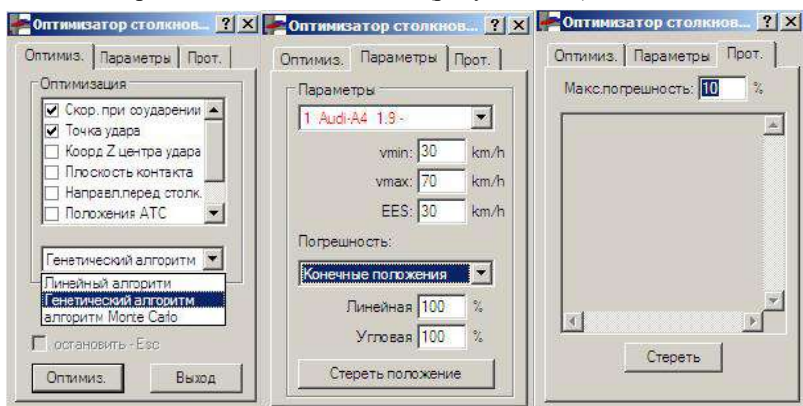


Рисунок 5.45 – Оптимизатор столкновений

Наиболее применимыми параметрами оптимизации являются скорости ТС в момент удара и расположение контактной точки.

Линейный алгоритм оптимизации ведет поиск по одному параметру, а когда этот параметр оптимизирован, то начинается поиск по другому параметру оптимизации. Поэтому, линейный алгоритм предпочтительно применим, когда достаточно точно знаем место столкновения и конечные положения ТС, а нужно найти только скорости.

Генетический алгоритм ведет поиск оптимального решения одновременно по нескольким параметрам. Отличие алгоритма Монте-Карло (поиск одновременно по нескольким параметрам) от генетического состоит в том, что поиск ведется по случайной совокупности оптимизируемых параметров.

Следующей опцией необходимо установить границы оптимизируемых параметров, а также определить вероятность соответствия указанных параметров оптимизации. Погрешность «Конечные положения – 100%» означает, что пользователь полностью (на 100%) уверен в соответствии указанных конечных положений ТС. Если, например, указать 50%, то оптимизатор при расчете будет варьировать конечными положениями. 50% для EES означает, что этот параметр будет приниматься в учет при оптимизации, и что он задан с вероятностью 50%.

Критерий EBS (equivalent barrier speed) позволяет сравнивать деформации ТС реальных ДТП с деформациями при краш-тестах. Под понятием EBS пони-

мается скорость наезда на массивный недеформируемый барьер, при котором наступают такие повреждения, как и для исследуемого, поврежденного в реальном ДТП ТС. При этом принимается, что вся кинетическая энергия во время теста преобразовывается в энергию деформации, а в действительности часть этой кинетической энергии при соударении с недеформируемым барьером превращается в остаточную пластическую деформацию. В программе энергия деформации обозначается через EES (energy equivalents peed). Из-за эластичности кузова ТС часть общей деформации снова преобразуется в кинетическую энергию. При этом только в случае полностью пластического соударения параметры EBS и EES совпадают. Для прямого центрального удара параметр EES можно определить через параметр EBS и коэффициент восстановления:

$$EES = EBS \sqrt{1 - k^2}.$$

Программа рассчитывает EES, и это значение необходимо сравнить с исходным, который можно определить двумя способами:

- 1) используя каталог EES;
- 2) используя модуль расчета Crash 3.

Каталог EES запускается командой «ТС» – «Каталог EES» либо нажатием кнопки с изображением автомобиля в окне «Моделирование столкновений». В появившемся окне необходимо выбрать параметры поиска, чтобы получить изображение аналогично поврежденному автомобилю (по заданному значению параметра EES).

Расчет параметра EBS производится при помощи модуля Crash 3 («ТС» – «Crash 3» – «расчет EBS»). Запустив эту функцию откроется окно «Расчет Crash 3 EBS», в котором необходимо выбрать результаты краш-теста автомобиля, аналогичного исследуемому (в закладке «База данных NHTSA»). В этом окне будут представлены расчетные параметры жесткости для данного автомобиля. Далее выбираем закладку «Деформация» и изображаем графически либо таблицей параметры деформации исследуемого автомобиля (рисунок 5.46).

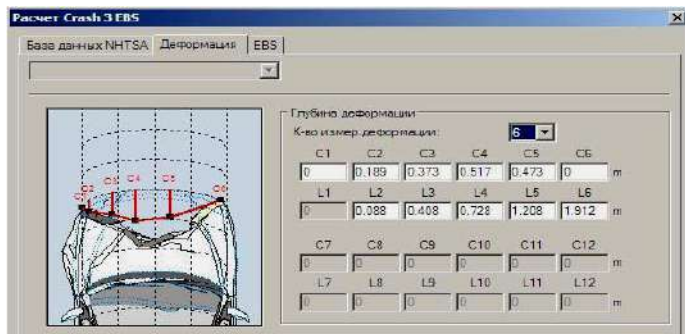


Рисунок 5.46 – Критерии сравнения деформации ТС реальных ДТП с деформациями при краш-тестах

Рассчитанный параметр EES будет показан в следующей закладке (рисунок 5.47). Задав значение коэффициента восстановления, будет рассчитано значение EES.

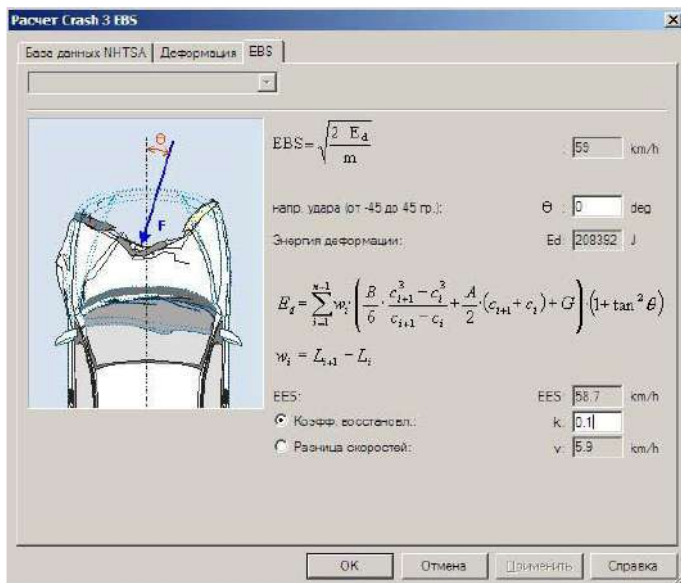


Рисунок 5.47 – Расчет критерия деформации EES

Математическая модель расчета столкновений основана на законе сохранения импульса. Однако незначительные изменения углов направления ТС перед соударением вызывает значительные изменения результатов расчета, что в действительности на практике не проявляется. Поэтому, для анализа лобовых и близких к ним столкновений приоритетным является расчет, основанный на законе сохранения энергии. Такой метод расчета запускается командой «Столкновение» – «Обратный расчет столкновений».

Значения параметров в окне «Обратный расчет столкновения» следующие (рисунок 5.48):

- Модель расчета предполагает выбор расчета по закону сохранения импульса (MV назад), закону сохранения энергии (EES назад) или закону сохранения импульса и его момента (Импульс/ момент назад).

- Выбор этой опции производится, если параметры движения ТС необходимо принять как результаты обратного кинематического расчета.

- В зависимости от принятой модели расчета, могут быть введены только определенные параметры (окна, в которых можно ввести или изменить параметры, выделены белым цветом). Окна серого цвета, представляют собой результаты расчета.

**Обратный расчет столкновения** [?] [X]

Модель расчета: EES назад

1 Mir 2 Fo

Принять данные из кинем. расчета

**Перед столкновением**

Ввод

|              |     |      |      |       |
|--------------|-----|------|------|-------|
| Скорость:    | v   | 47.5 | 60.3 | km/h  |
| Направл.:    | NY  | 92   | 10.2 | [ ]   |
| Поворот:     | PSI | 92   | 0    | [ ]   |
| Угл.ск.пов.: | om  | 0    | 0    | rad/s |

**После столкновения**

|                    |       |       |       |       |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| Скорость:          | v'    | 38.7  | 47.7  | km/h  |
| Направл.:          | NY'   | 64.4  | 28.2  | [ ]   |
| Поворот:           | PSI'  | 92    | 0     | [ ]   |
| Угл.ск.пов.:       | om'   | -3.89 | -7.03 | rad/s |
| Угл.скор.поворота: | omind | -5.9  | -5.78 | rad/s |

**Расчет столк.**

|                        |      |        |       |                  |
|------------------------|------|--------|-------|------------------|
| Расчет EES:            | EES  | 21.5   | 21.1  | km/h             |
| Плечо удар.имп.:       | N    | 1.28   | 1.47  | m                |
| Напр. удар.имп.:       | rho  | -126.4 | 145.6 | [ ]              |
| Динам.деформ.:         | sDef | 0.27   | 0.29  | m                |
| Жесткости:             | c    | 508.8  | 470.9 | kN/m             |
| Измен.скорости:        | dv   | 22.3   | 21    | km/h             |
| Скорость ЦУ:           | vSt  | 65.7   | 62.7  | km/h             |
| Время удара:           | tK   | 0.095  | 0.098 | s                |
| среднее ускор.:        | aKm  | 64.93  | 59.51 | m/s <sup>2</sup> |
| Импульс:               | dP   | 6660.5 |       | Ns               |
| Коэфф.восст.:          | e    | 0.46   | 0.42  |                  |
| Разница скор.:         | Vsep | -16.9  | 29.37 | km/h             |
| Коэфф.трения:          | u    | 1.46   |       |                  |
| Контакт.плоскость x/y: | phi  | 0      | [ ]   |                  |
| Коорд. X для ЦУ:       | x    | 3.1    |       | m                |
| Коорд. Y для ЦУ:       | y    | -10.07 |       | m                |

Точка контакта  
 Плоск.контакта

Расчет

Рисунок 5.48 – Опции анализа лобовых столкновений

Если будет выбрана жесткостная модель для расчета, то ее параметры необходимо сначала определить в окне «ТС» – «Параметры столкновения» (рисунок 5.49). В закладке «кузов» необходимо указать жесткость кузова (высокая, средняя, низкая) или же указать максимальную деформацию («Деформация»). Параметр «Трение» определяет трение кузова об опорную поверхность, при этом используется принята линейная зависимость жесткости.

Если же необходимо задать иную характеристику жесткости кузова, то необходимо выбрать опцию «ТС» – «Параметры жесткости кузова». В появившемся окне необходимо выбрать автомобиль, аналогичный исследуемому, и в соответствующем окне графически (через контрольные точки) задать характеристику жесткости кузова для исследуемого ТС.

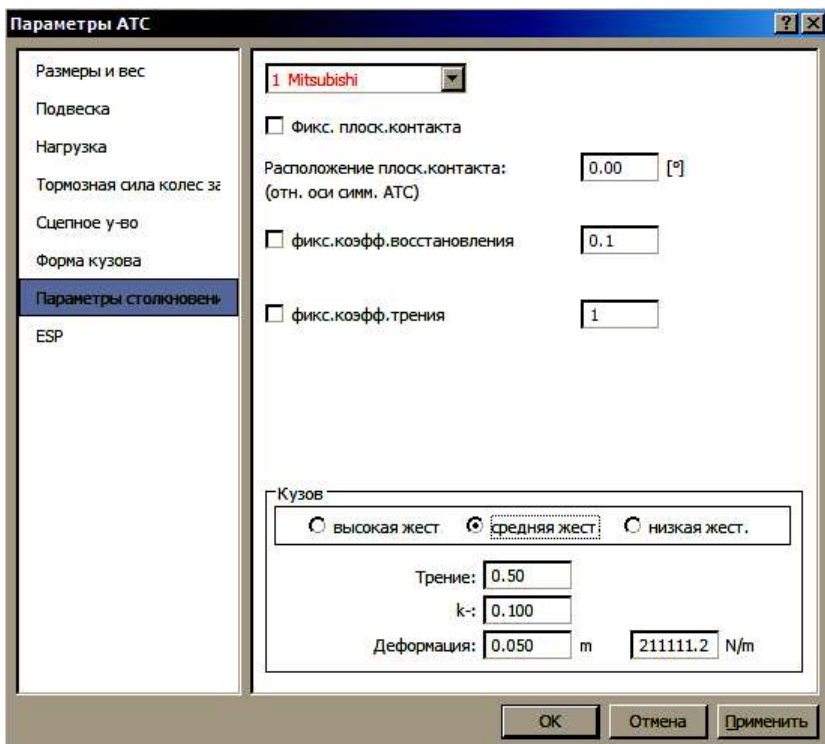


Рисунок 5.49 – Редактор выбора параметров жесткостной модели столкновения

### 5.2.6 Кинематический расчет

Расчет движения ТС или другого объекта в кинематике можно вести активизировав модуль прикладных расчетов «Динамика ТС» – «Прикладные расчеты» (рисунок 5.50). Далее, выбрав соответствующую закладку, имеется возможность выполнить следующие расчеты:

- расчет параметров движения в кинематике («v-s-t»);
- расчет процесса торможения («После удара»);
- расчет процесса реакция-торможение («До удара»);
- расчет процесса разгон-реакция-торможение («Разгон/Торможение»);
- расчет столкновение-движение после столкновения («Столкновение/после столкновения»);
- расчет наезда на пешехода («Пешеход»);
- расчет отброса пешехода («Отброс пешехода»).



Рисунок 5.50 – Расчет движения ТС с помощью модуля прикладных расчетов

Модуль «После удара» производит расчет процесса торможения (рисунок 5.51). В качестве исходных данных используются следующие параметры:  $v_0$  – начальная скорость;  $v_1$  – конечная скорость;  $s_b$  – расстояние торможения;  $a$  – замедление;  $t_b$  – время торможения.



Рисунок 5.51 – Модуль «После удара» для расчета процесса торможения



Модуль «До удара» производит расчет процесса реакции водителя и торможения. В качестве исходных данных должны быть заданы 5 параметров.

На рисунке 5.51 представлены исходные и расчетные значения:

$t$  – общее время ( $tr + ts + tb$ );

$tr$  – время реакции (включая время срабатывания тормозов);

$ts$  – время нарастания замедления;

$tb$  – время торможения с установившимся замедлением  $a$ ;

$s$  – общее расстояние ( $sr + ss + sb$ );

$sr$  – расстояние за время реакции и срабатывания тормозов;

$ss$  – расстояние за время нарастания замедления;

$sb$  – расстояние торможения с установившимся замедлением;

$av$  – требуемое замедление для предотвращения ДТП;

$trv$  – требуемое время для предотвращения ДТП;

$vv$  – скорость, при которой было бы предотвращено ДТП;

$sv$  – расстояние, при котором было бы предотвращено ДТП;

$v0'$  – допустимая скорость.

$v1'$  – скорость при наезде, при движении с допустимой скоростью.

Модуль «Разгон / Торможение» производит расчет процесса движения автомобиля, когда после разгона водитель реагирует на опасность и начинает тормозить (рисунок 5.52). В качестве исходных данных задается 7 параметров.



Рисунок 5.52 – Модуль «Разгон / Торможение» для расчета процесса движения ТС с реакцией водителя

На рисунке 5.52 представлены следующие исходные и расчетные значения параметров:

$v0$  – начальная скорость;

$vr$  – скорость в момент реакции водителя;

$vs$  – скорость в начале фазы нарастания замедления;

$v_b$  – скорость в начале фазы торможения с установившимся замедлением;  
 $v_1$  – конечная скорость;  
 $v_{\max}$  – максимальная скорость;  
 $aa$  – значение ускорения;  
 $ab$  – значение замедления;  
 $t$  – общее время ( $ta + tk + tr + ts + tb$ );  
 $ta$  – время разгона;  
 $tk$  – время движения с постоянной скоростью  $v_{\max}$ , если она достигнута;  
 $tr$  – время реакции (включая время срабатывания тормозов);  
 $ts$  – время нарастания замедления;  
 $tb$  – время торможения с установившимся замедлением;  
 $s$  – общее расстояние ( $sa + sk + sr + ss + sb$ );  
 $sa$  – расстояние разгона;  
 $sk$  – расстояние на разгон от 0 до  $v_{\max}$ ;  
 $sr$  – расстояние за время реакции (и срабатывания тормозов);  
 $ss$  – расстояние за время нарастания замедления;  
 $sb$  – расстояние торможения с установившимся замедлением.

Модуль «Столкновение / после столкновения» производит упрощенный расчет столкновения. Для этого необходимо установить автотранспортные средства в положении столкновения, затем, нажав кнопку «Стоп» перенести ТС в конечные положения. Нажатием кнопки «Актуализировать» автоматически определяются расстояния перемещения и поворота ТС. Задав значения замедлений для обоих ТС, а также для одного из них значение параметра EES, производится расчет параметров ТС перед их столкновением.

На рисунке 5.53 производится кинематический расчет наезда на пешехода при помощи модуля «Пешеход».

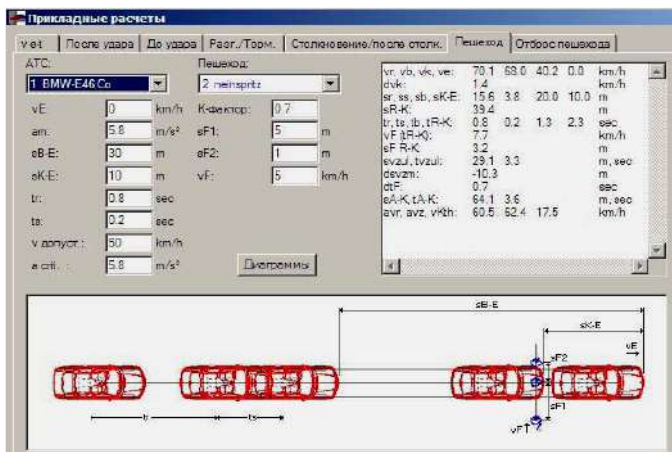


Рисунок 5.53 – Пример кинематического расчета наезда на пешехода



На рисунке 5.53 представлены следующие исходные данные:

- vE – снижение скорости автомобиля при наезде;
- am – среднее значение замедления;
- sB-E – расстояние от начала торможения до конечного положения ТС;
- sK-E – расстояние от места наезда до конечного положения ТС;
- tr – время реакции (включая время срабатывания тормозов);
- ts – время нарастания замедления;
- v допуст – допустимая скорость движения;
- K-фактор – коэффициент удара при наезде;
- sF1 – расстояние, преодоленное пешеходом до наезда;
- sF2 – расстояние, которое необходимо было бы преодолеть пешеходу, чтобы покинуть коридор движения автомобиля;
- vF – скорость движения пешехода;

Рассчитываемыми параметрами являются:

- vr – скорость в момент реакции водителя;
- vb – скорость в начале торможения;
- vk – скорость при наезде;
- ve – конечная скорость;
- dvk – изменение скорости автомобиля при наезде на пешехода;
- sr – расстояние за время реакции (и срабатывания тормозов);
- ss – расстояние за время нарастания замедления;
- sb – расстояние торможения с установившимся замедлением;
- sK-E – расстояние, преодоленное автомобилем, от места наезда до конечного положения;
- sR-K – расстояние, преодоленное автомобилем, от места реакции до места наезда;
- tr – время реакции (включая время срабатывания тормозов);
- ts – время нарастания замедления;
- tb – время торможения с установившимся замедлением;
- tR-K – время между моментом реакции водителя и наездом;
- vF (tR-K) – рассчитанная скорость движения пешехода, при которой пешеход преодолет расстояние до места наезда за время от реагирования водителя до наезда (tR-K);
- sF R-K – расстояние, пройденное пешеходом за время (tR-K) при указанной скорости движения пешехода;
- svzul – остановочный путь автомобиля при движении с допустимой скоростью;

$tv_{zul}$  – время до полной остановки автомобиля, при движении с допустимой скоростью  $v_{zul}$ ;

$dsv_{zm}$  – расстояние от конечного положения при торможении с допустимой скоростью, и местом наезда;

$dtF$  – время, необходимое для пешехода, чтобы покинуть коридор движения автомобиля;

$sA-K$  – расстояние, пройденное ТС с места, где водитель мог идентифицировать опасность для движения, и местом наезда;

$Avz$  – скорость автомобиля, при которой имеется техническая возможность избежать ДТП по времени (пешеход покинет коридор движения автомобиля);

$vK_{th}$  – теоретическая скорость при достижении ТС места наезда при движении с допустимой скоростью;

Скорость автомобиля при наезде на пешехода может быть оценена при помощи модуля «Отброс пешехода». При расчете необходимо задать:

– способ расчета (автомобиль заторможен перед наездом на пешехода или после наезда);

– вес автомобиля;

– вес пешехода;

– значение ударного фактора при наезде;

– величину отброса пешехода;

– значение тормозного пути;

– пределы замедления автомобиля;

– пределы определения значения скорости (представлены на диаграмме линиями синего, зеленого и красного цвета);

– если будет задано предполагаемое значение скорости при наезде, то это значение на диаграмме будет представлено черным квадратом.

Расчетные значения:

– скорость непосредственно после наезда ( $v'$ );

– уменьшение скорости автомобиля при наезде ( $dvk$ );

– скорость непосредственно перед наездом ( $vk$ ).

Расчет относительной скорости движения ТС производится при помощи команды «ТС» – «Расчет по следам контакта колес». В появившемся окне задавая параметры движения опережающего и опережаемого автомобилей, будет показана форма образующегося следа на кузове опережаемого ТС (рисунок 5.54).

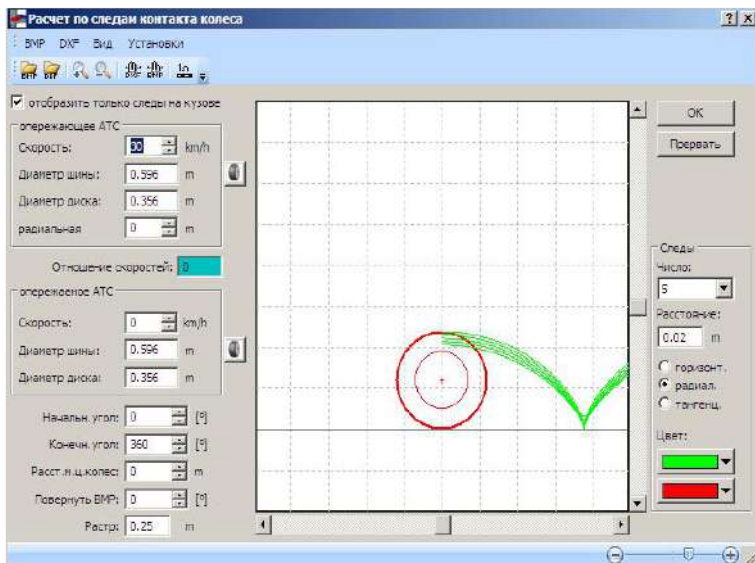


Рисунок 5.54 – Расчет относительной скорости движения ТС

Сопоставление теоретического и действительного следа на кузове производим, загрузив фотографию следа. Далее параметры движения автомобиля необходимо изменить так, чтобы геометрическая форма образовавшегося и действительного следа совпали (рисунок 5.55).

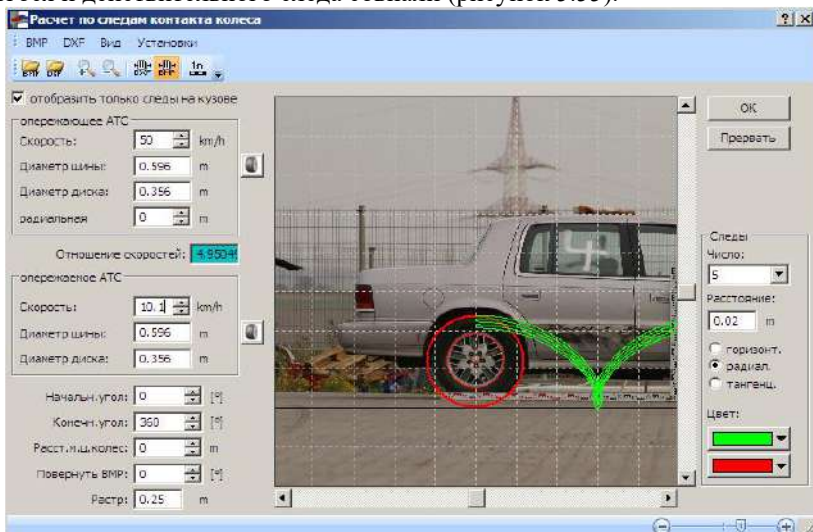


Рисунок 5.55 – Сопоставление теоретического и действительного следа на кузове ТС

### 5.2.7 Многомассовые системы

Загрузить многомассовую систему можно из меню «Файл» – «Импорт» – «Параметры ТС» – «Multibody» и далее выбрать необходимый файл (например, пешеход – файл «Pedestrian 20061127.mbdef», представленный на рисунке 5.56). Далее при помощи команды «ТС» – «Многомассовые системы» будет открыто окно, в котором представлены параметры этой многомассовой системы, которую составляют соединенные между собой эллипсоиды. Пометив конкретный эллипсоид, можно изменить его параметры, при необходимости – добавить новые элементы или удалить имеющиеся. В данном окне указаны параметры трения при контакте с ТС и с дорожной поверхностью, которые будут применены при моделировании движения.

Параметры отдельных тел и их соединений можно далее изменять в следующих закладках. Закладка «Пассажир» предназначена для моделирования движения пассажиров в салоне автомобиля, например, при движении после столкновения.

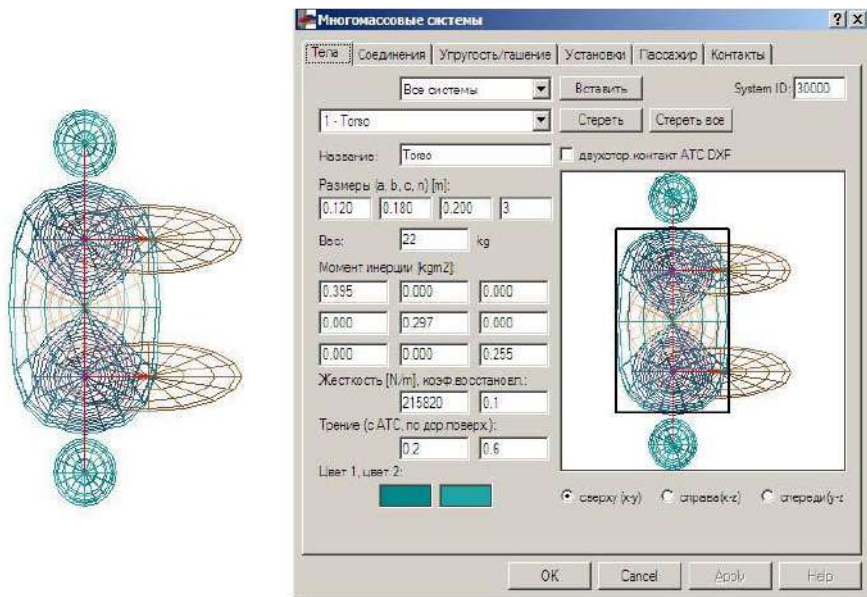


Рисунок 5.56 – Пример редактора многомассовой системы

Для моделирования движения пассажиров в салоне автомобиля после столкновения, сначала необходимо подготовить проект: загрузить ТС; про-

известии моделирование столкновения и движения в послестолкнонционной фазе и записать проект. Затем загрузить необходимую многомассовую систему (например, водителя и пассажира, не пристегнутых ремнями безопасности (файл «2 passengers+cockpit+unbelted.mbdef», представленный на рисунке 5.57). В окне «Пассажир» задаем параметры времени расчета движения многомассовой системы (напр, 0 с – 0,5 с) и нажать клавишу «Расчет». Анимация такого моделирования более наглядна в формате 3D, если кузов автомобиля прозрачный (код прозрачного цвета – 0;255;255, команда «Сервис» – «Установки» – «Выбор цвета»).

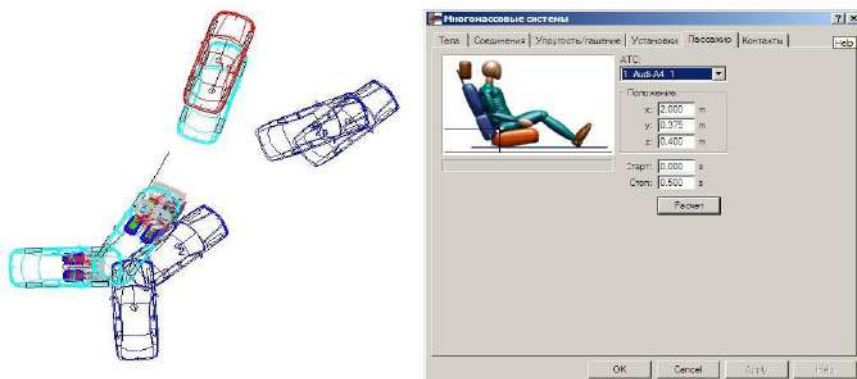


Рисунок 5.57 – Пример моделирования движения пассажиров в салоне ТС после столкновения для водителя, не пристегнутого ремнем безопасности

Подготовка моделирования столкновений ТС и многомассовых систем производится по общим правилам: загружаем объекты, при необходимости изменяем их параметры; вводим параметры движения (скорости, направляющие углы и т. д.). Необходимо иметь в виду, что центр масс многомассовой системы находится над опорной поверхностью и поэтому многомассовая модель нестабильна. В связи с этим интервал времени от начала моделирования до столкновения не должен быть большим. Важно знать, что для моделей автомобилей в формате idf, dxf, x61 или fce будет загружена действительная внешняя форма кузова и эта форма будет принята в учет при моделировании.

Для моделирования наезда ТС на пешехода необходимо загрузить многомассовую модель пешехода, параметры которого можно изменить (например, файл «Pedestrian 20061127.mbdef, представленный на рисунке 5.58).

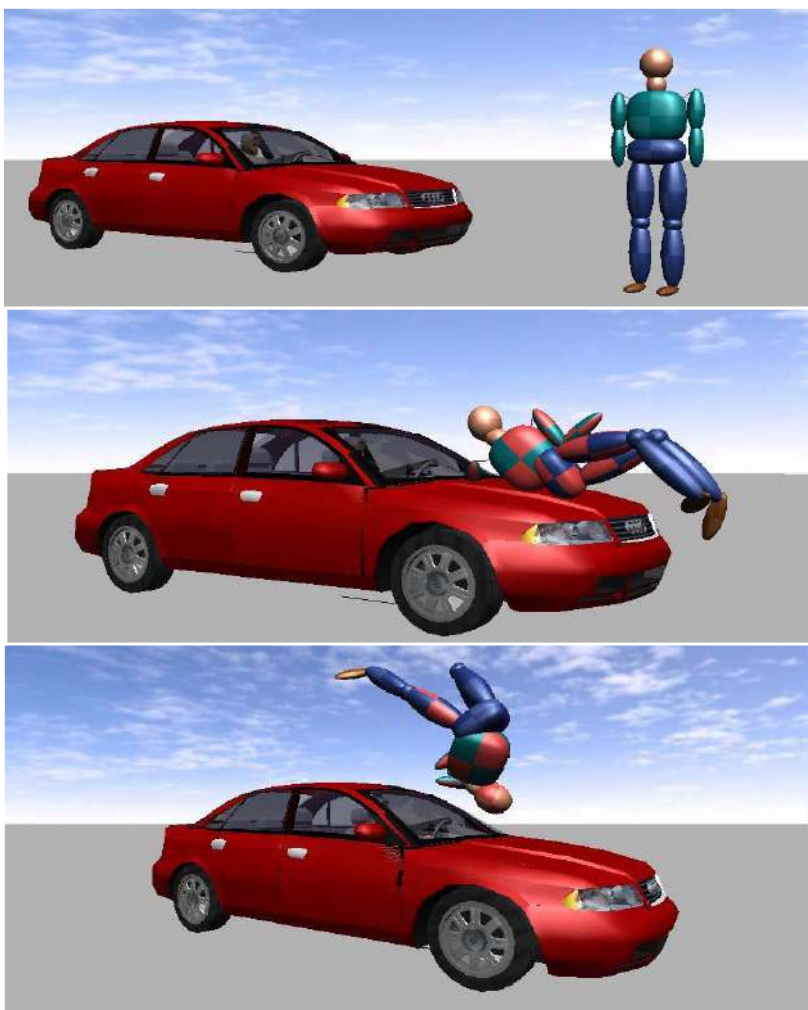


Рисунок 5.58 – Пример моделирования наезда ТС на пешехода

Для моделирования грузового ТС, перевозящего груз, необходимо сначала загрузить автотранспортное средство (например, седельный тягач с полуприцепом) и согласовать их параметры. Далее из базы данных многомассовых систем загружаем груз (файл «block.mbdef», рисунок 5.59). Выбрав команду «ТС» – «Многомассовые системы», изменяем параметры груза и, разместив его на грузовой платформе полуприцепа (выбрав нужную высоту), в окне «Установки системы» определяем его как груз.

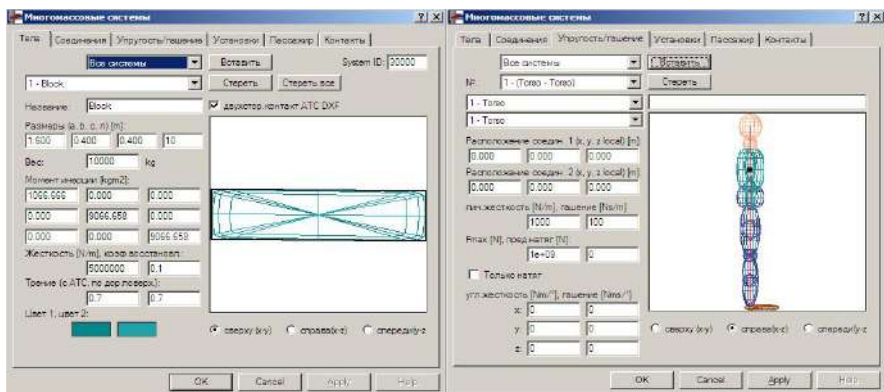


Рисунок 5.59 – Пример редактора моделирования грузового ТС с грузом

Если груз не будет дополнительно закреплен, его перемещение на грузовой платформе будет ограничено только силой трения груза об опорную поверхность. Поэтому, в определенных условиях движения (например, на повороте), незакрепленный груз может сместиться и вызвать боковой переворот ТС. В моделировании такого механизма опция «Динамика ТС» – «Идентифицировать боковой переворот» должна быть активна. Кроме того, для такого случая моделирования необходимо корректно задать параметры жесткости подвесок ТС и сцепного устройства (рисунок 5.60).



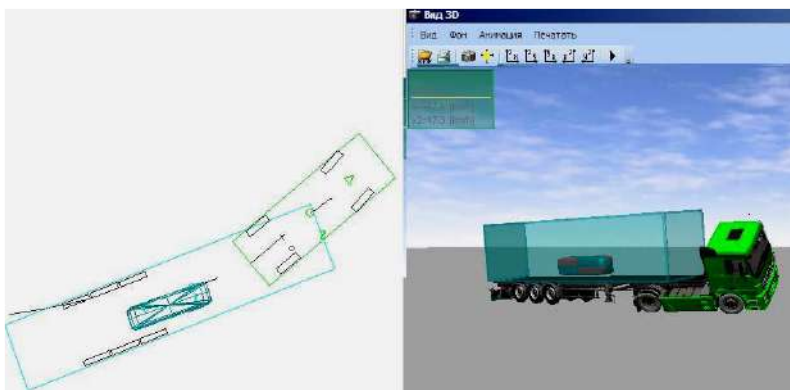


Рисунок 5.60 – Пример влияния незакрепленного груза на боковой поворот ТС

Для крепления груза к грузовой платформе прицепа необходимо использовать закладку «Упругость/гашение». В данном окне необходимо указать, к какому ТС должен быть закреплен груз и ввести координаты крепления груза (для каждого элемента точки крепления выделяются черным цветом, рисунок 5.61). Если груз будет закреплен ремнями или тросами, то необходимо задать опцию «только натяг», поскольку элемент крепления работает только на растяжение.

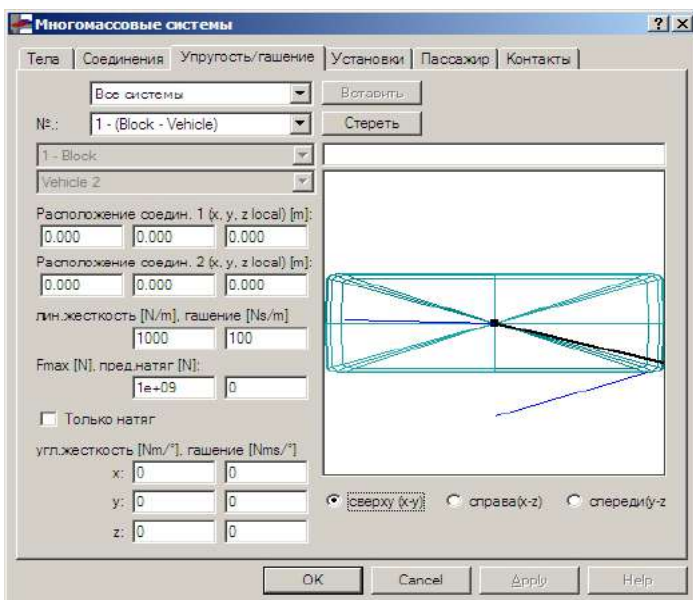


Рисунок 5.61 – Пример редактора крепления груза к грузовой платформе



Расположение точек крепления в таблице задается относительно центров масс соединяемого ТС и груза. Кроме того, для крепления ремнями или тросами, существенным параметром является также значение максимальной силы натяжения ( $F_{max}$ ), при превышении которой наступает разрыв элемента крепления.

### 5.2.8 Документирование и визуализация

Распечатка файла (отчета) исходных данных и результатов произведенных расчетов и моделирования производится при помощи команды «Файл» – «Результаты...». При необходимости распечатать или сохранить фрагмент этого отчета, выбирается команда «Сервис» – «Результаты» (или клавиша F4) и в дополнительном окне «Установки» необходимо отметить нужные данные (рисунок 5.62).

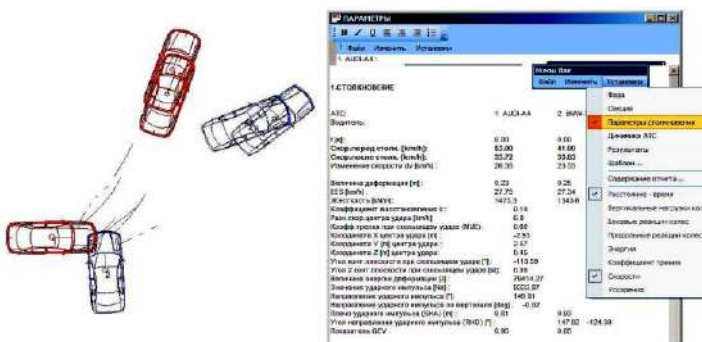


Рисунок 5.62 – Пример сохранения фрагмента отчета

Графическая визуализация произведенного расчета или моделирования может производиться при помощи диаграмм «Сервис» – «Диаграммы» (или клавиша F2). В появившемся окне нужно выбрать необходимые данные, которые будут представлены в виде диаграмм (рисунок 5.63).



Рисунок 5.63 – Пример графической визуализации расчета

Визуализация моделирования в формате 3D для определенного момента времени производится при помощи команды «Вид» – «Вид 3D». Положение видеокамеры, из позиции которой будет представлен вид 3D, можно изменять при помощи функции «Сервис» – «Положение видеокамеры» (вращая силуэт видеокамеры, направляем ее в место исследования, рисунок 5.64). Параметры вида могут быть изменены выбрав в появившемся окне команду «Вид» – «Положение камеры».

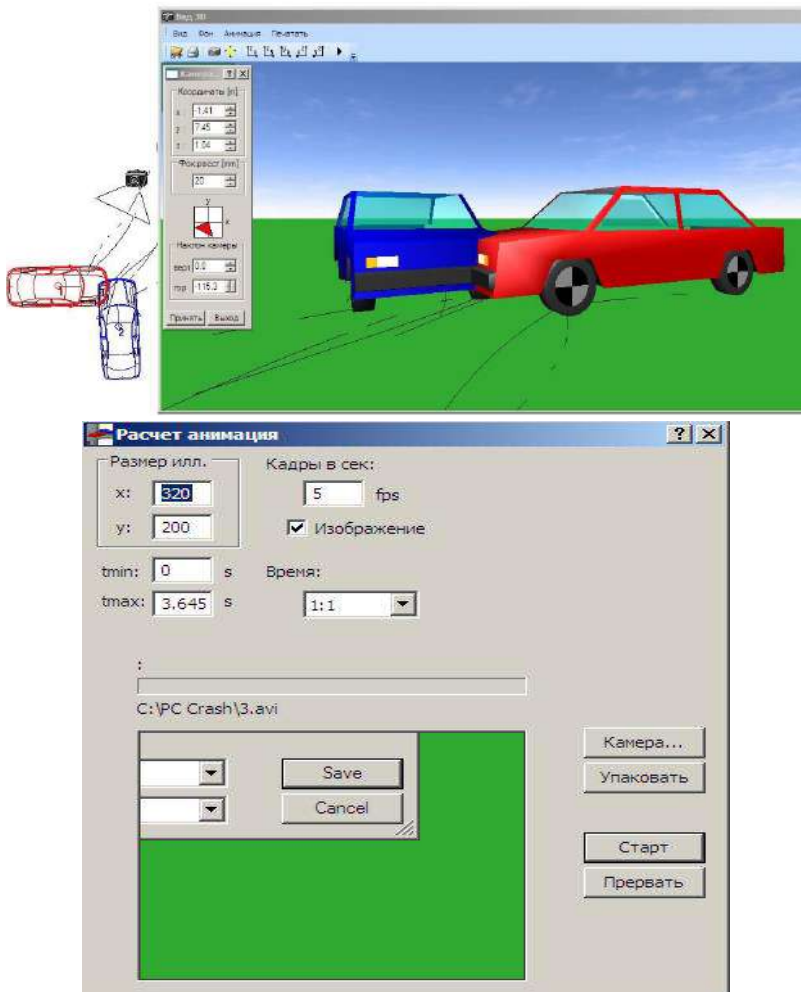


Рисунок 5.64 – Визуализация моделирования с помощью видеокамеры и редактора параметров вида

Важным преимуществом является возможность создать анимацию произведенного моделирования. Для этого необходимо на рабочем столе выбрать место видеокамеры, произвести моделирование, затем в окне «Вид 3D» выбрать закладку «Анимация» и далее команду «Расчет», после которой будет предложено выбрать название файла для анимации. В открывшемся окне необходимо указать параметры для создаваемого видеофильма и нажать кнопку «Старт». Созданный видеофильм в формате .avi может демонстрироваться и без программы PC Crash.

В анимации имеется возможность видеть в движении не только ТС и многомассовые системы, но и другие объекты, например, пешеходов. Для этого для объекта (пешехода) необходимо загрузить формат движущегося изображения («ТС» – «Изображение ТС» – Вид 3D) – «Открыть DXF» из папки «Direct X» выбрать «Human» – «PeopleAnimated» и далее конкретное изображение (например, бегущий мальчик – «Boysrunning», рисунок 5.65).



Рисунок 5.65 – Пример анимации

### 5.3 Компьютерная программа Экспресс анализ ДТП ExrAn

Программа ExrAn предназначена для проведения анализа дорожно-транспортных происшествий рисунок 5.66 и позволяет рассчитывать:

- скорость легковых автомобилей по следу торможения на сухом асфальтобетонном покрытии;
- допустимую скорость по условиям видимости;
- остановочный путь при высокой степени вероятности возникновения опасности для движения;
- удаление автомобиля от места наезда в момент возникновения опасности для движения при наезде без торможения;
- содержит справочник скоростей движения пешеходов различных категорий при различных темпах движения;
- позволяет распечатывать результаты расчетов.

Интерфейс программы доступней и не предполагает высокую степень специальной подготовки.

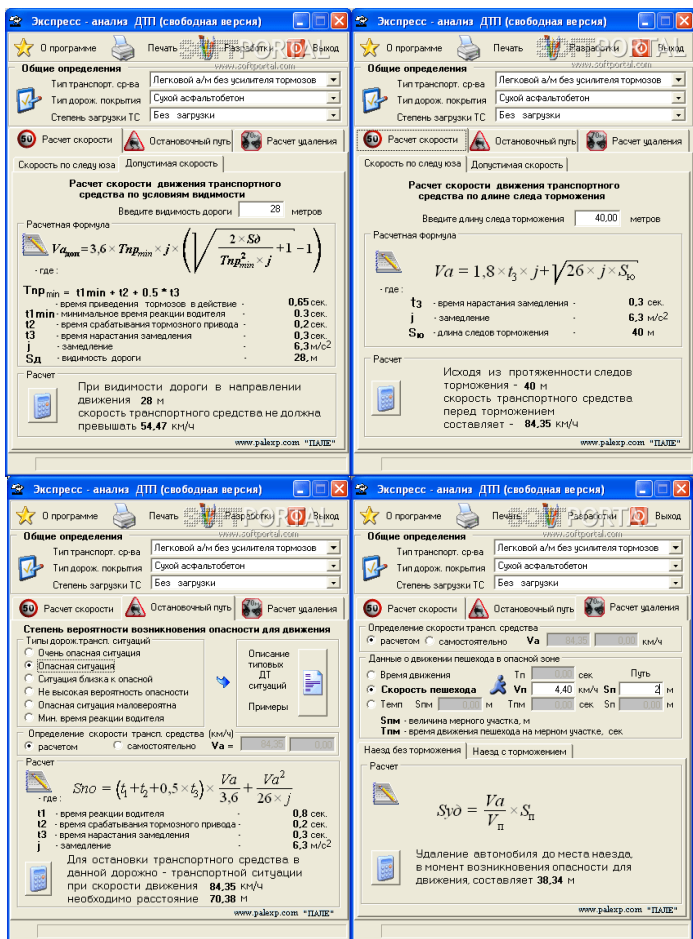


Рисунок 5.66 – Оформление программы Экспресс анализ ДТП ЭкспАн

### Контрольные вопросы

- 1 Перечислите исходные материалы при исследовании ДТП, связанных с наездами на пешеходов.
- 2 Перечислите исходные материалы при исследовании ДТП, связанных с столкновением ТС.
- 3 Перечислите исходные материалы при исследовании ДТП, связанных с потерей устойчивости ТС, с ударом о препятствие, столкновением и т. п.
- 4 Перечислите исходные материалы при исследовании ДТП, связанных с маневрированием ТС.
- 5 Перечислите исходные материалы при исследовании ДТП, связанных с диагностикой технического состояния ТС.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Кубланов, М. С.** Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Ч.1. Моделирование систем и процессов : учеб. пособие / М. С. Кубланов.– М.: МГТУ ГА, 2004. – 108 с.

2 **Кубланов, М. С.** Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Ч.П. Планирование экспериментов и обработка результатов измерений: учеб. пособие / М. С. Кубланов. – М.: МГТУ ГА, 2004. – 125 с.

3 **Никонов, В. Н.** Проверка метода DuMesh. Центр независимой экспертизы на автомобильном транспорте «ЦНЭАТ» [Электронный ресурс] / Метод DuMesh. – Гомель, 2015. – Режим доступа: <http://www.cneat.ru/nikonov-9.htm>. – Дата доступа: 14.02.2015.

4 **Моисеева, Л. Т.** Методы математического моделирования процессов в машиностроении. Курс лекций. / Л. Т. Моисеева. – Курск, 2008. – 46 с.

5 **Понтрягин, Л. С.** Дифференциальные уравнения и их приложения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1988. – 208 с.

6 **Тихонов, Э. Е.** Методы прогнозирования в условиях рынка : учеб. пособие. / Э. Е. Тихонов. – Невинномысск, 2006. – 221 с.

7 **Пацкевич В. А., Галушко В. Н., Королёнок Т. С.** Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса: III Международная научно-техническая конференция.– Гомель, БелГУТ, 2013. – С.180-181.

8 **Папков, Б. В.** Надежность и эффективность электроснабжения : учеб. пособие / Б. В. Папков, Д. Ю. Пашали. – Уфа : Уфимс. гос. авиац. техн. ун-т, 2005. – 380 с.

9 **Цисарь, И.Ф.** MATLAB Simulink. Компьютерное моделирование экономики / И.Ф. Цисарь. – М.: Солон-Пресс, 2008.– 256с

10 **Гандер, В.** Решение задач в научных вычислениях с применением Maple и MATLAB / В.Гандер, И.Гржебичек. – Изд-во "Вассамедина" 2005г. – 520 с.

11 **Шевченко Д. Н.** Теория вероятностей и математическая статистика / Д. Н. Шевченко. – Гомель : БелГУТ, 2006. – 318 с.

12 **Папков, Б. В.** Надежность и эффективность электроснабжения : учеб. пособие / Б. В. Папков, Д. Ю. Пашали. – Уфа : Уфимс. гос. авиац. техн. ун-т, 2005. – 380 с.

13 Основы теории надежности систем электроснабжения / В. В. Карпов [и др.]. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2003. – 72 с.

14 Анализ статистических данных на персональном компьютере : лаб. практик. / Т. В. Прищепова [и др.]; под ред. В. С. Серёгиной; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель : БелГУТ, 2006. – 95 с.

15 **Боровиков, В. П.** Популярное введение в программу STATISTICA / В. П. Боровиков. – М. : КомпьютерПресс, 1998. – 69 с.

16 **Жученко, Ю. М.** Статистическая обработка информации с применением персональных компьютеров : практик. руководство для студентов 5-го курса / Ю. М. Жученко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 101 с.

17 **Барзилович, Е.Ю.** Оптимально управляемые случайные процессы и их приложения (теоретические основы эксплуатации авиационных систем по состоянию) / Е. Ю. Барзилович. – Егорьевск: ЕАТК ГА, 1996. – 299 с.

18 **Хикс, Ч.Р.** Основные принципы планирования эксперимента / Ч. Р. Хикс. – М.: Мир, 1967. – 406 с.

19 Задачи и модели исследования операций. Ч.3. Технология имитации на ЭВМ и принятие решений : учеб. пособие / И. В. Максимей [и др.]. – Гомель : БелГУТ, 1999. – 150 с.

20 **Максимей, И. В.** Имитационная модель технологических процессов на городском транспорте / И.В. Максимей, В.Д. Левчук, В.Н. Галушко и др. // Информатика. – 2006. – № 2. – 124-134 с.

21 Центр диагностики геометрии кузова автомобиля «Центр63» [Электронный ресурс] / Геометрия кузова. – Гомель, 2015. – Режим доступа: [http://center63.com/?page\\_id=6](http://center63.com/?page_id=6). – Дата доступа: 14.02.2015.

22 **Рыжкин, А. А.** Основы теории надежности : учеб. пособие / А. А. Рыжкин, Б. Н. Слюсарь, К. Г. Шучев. – Ростов н/Д : Издательский центр ДГТУ, 2002. – 182 с.

23 Правила дорожного движения с комментариями и иллюстрациями : учеб. / С. А. Аземша, С. Л. Лапский, С. В. Скирковский; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2012. – 266 с.

24 **Scharnhorst Th.**, Исследование деформаций кузова автомобиля и кинематики пассажиров при моделировании столкновений / **Th. Scharnhorst, K. Schettler-Kohler, H. Wester** // *Automobiltechn Z.* – 1990. – Vol. 92, № 11. - S. 644-646, 649-652.

25 Апробация метода конечных элементов для расчета автомобильных аварий. Центр независимой экспертизы на автомобильном транспорте «ЦНЭАТ» [Электронный ресурс] / Метод DuMesh. – Гомель, 2014. – Режим доступа: <http://www.cneat.ru/old/lex2.html>. – Дата доступа: 20.12.2014.

26 **Степина, П. А.** Разработка методики совершенствования автотехнической экспертизы дорожно-транспортных происшествий : дис. канд. техн. наук / П.А. Степина ; ГОУ ВПО «Санкт-петербургский государственный архитектурно-строительный университет». – Санкт-Петербург, 2010. – 168 с.

27 **Галушко, В. Н.** Анализ дорожно-транспортных происшествий г. Гомеля / В.Н. Галушко, С.А. Аземша, С.В. Скирковский. – Журнал "Вестник БелГУТа", Гомель. – 2015. – №1. – С. 49–52.

28 **Галушко, В. Н.** Анализ влияния некоторых факторов на дорожно-транспортные происшествия по вине водителей маршрутных транспортных средств / В.Н. Галушко, С.А. Аземша. – Журнал "Вестник БелГУТа", Гомель. – 2013. – №2 (27). – С. 48–50.

29 **Кулинец И.И.**, « Экономика и социология труда» - М.: Центр экономики и маркетинга. 2001г.

30 **Иларионов, В.А.** Экспертиза дорожно-транспортных происшествий. М. : Транспорт, 1989. – 255 с.

31 Судебная автотехническая экспертиза, ч.2 под ред. В.А. Иларионова. М. : ВНИИСЭ, 1980. – 163 с.

32 НИОКР лаборатории «Вычислительная механика» [Электронный ресурс] / Конечно-элементное моделирование лобового столкновения автомобилей ВАЗ-21093 и ЗИЛ-433362. – Гомель, 2015. – Режим доступа: <http://fea.ru/project/115>. – Дата доступа: 4.01.2015.

33 Экспертиза ДТП [Электронный ресурс] / Система визуального моделирования дорожно-транспортной ситуации. Автотехническая экспертиза. – Гомель, 2015. – Режим доступа: [http://www.bibika.ru/p\\_exp\\_f.php](http://www.bibika.ru/p_exp_f.php). – Дата доступа: 10.01.2015.

34 EDC [Электронный ресурс] / HVE-CSI Crash Reconstruction Software. – Гомель, 2015. – Режим доступа: <http://www.edccorp.com/promotions/HVE-CSI-April.html>. – Дата доступа: 23.01.2015.

35 **Пучкин, В.А.** Основы экспертного анализа дорожно-транспортных происшествий: База данных. Экспертная техника. Методы решений / В.А. Пучкин. – Ростов н/Д: ИПО ПИ ЮФУ, 2010. – 400 с.

36 **Бююль А., SPSS:** Искусство обработки информации. Анализ статистических данных и восстановление скрытых закономерностей: пер. с нем. / А. Бююль, П. Цёфель – СПб.: ДиаСофтЮП, 2005. – 608 с.

Учебное издание

*Галушко Виктор Николаевич  
Аземша Сергей Александрович*

**ЭКСПЕРТИЗА ДОРОЖНО-ТРАНСПОРТНЫХ ПРОИСШЕСТВИЙ С  
АНАЛИЗОМ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО  
ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ**

Учебно-методическое пособие

Редактор И. И. Э в е н т о в  
Технический редактор В. Н. К у ч е р о в а

Подписано в печать . . . 2015 г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз.  
Зак. № . Изд. № 106.

Издатель и полиграфическое исполнение  
Белорусский государственный университет транспорта:  
ЛИ № 02330/0552508 от 09.07.2009 г.  
ЛП № 02330/0494150 от 03.04.2009 г.  
246653 г. Гомель, ул. Кирова, 34